

Cours RDM-Élasticité

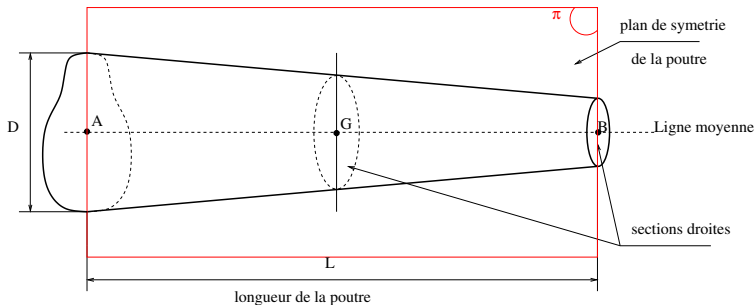
FERDJANI Hicheme, Blida, Algérie, h_ferdjani@yahoo.fr

February 18, 2022

Chapitre I: Introduction

La RDM étudie la **réponse mécanique** de **structures** en **équilibre** sous l'action d'efforts extérieurs. Ces structures possèdent une forme particulière appelée **poutre**.

Notion de poutre



- La ligne moyenne est le lieu des centres de gravité (CDG) A, \dots, G, \dots, B des sections droites successives
- Les sections droites sont des sections planes et perpendiculaires à la ligne moyenne

Remarques

- On ne considère dans ce cours que les poutres **droites** à section droite **symétrique**
- On ne considère que le cas de forces extérieures contenues dans le plan de symétrie de la poutre (Problèmes plans).
- Pour que les équations de la RDM soient valables, il faut que la poutre soit longue par rapport aux dimensions des sections droites ($L \geq 10D$).

La RDM a deux objectifs :

- ① **Vérification** : Connaissant les caractéristiques de la poutre (dimensions et matériau) et le chargement appliqué, vérifier si elle résiste, et calculer le chargement maximal qu'elle peut supporter.
- ② **Dimensionnement** : Connaissant le chargement maximal appliqué, dimensionner la poutre et choisir son matériau afin d'assurer sa résistance.

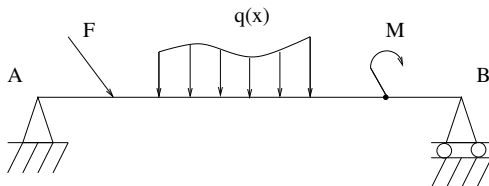
Hypothèses fondamentales

- 1 Les matériaux sont **homogènes** et **isotropes**.
- 2 **Hypothèse de Navier Bernoulli**: les sections droites, planes et perpendiculaires à la ligne moyenne, restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne. Il n'y a pas de gauchissement des sections droites.
- 3 On se place toujours dans le cas des petites déformations.

Définitions

- Un corps est homogène lorsque tous les grains de matière sont identiques.
- Un solide est isotrope lorsque tous les points de sa structure ont les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions.

Efforts extérieurs et Actions d'appui



F : Force concentrée (N)

$q(x)$: charge répartie (N/m)

M : Couple (N.m)

A et B : Appuis

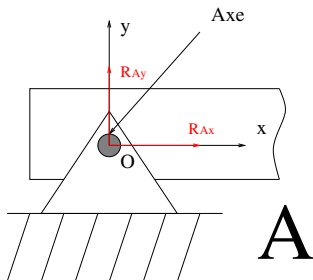
Les appuis

A tout mouvement empêché correspond une action d'appui:

- à tout mouvement de translation empêché dans une direction donnée, correspond une action d'appui dans cette direction.
- à tout mouvement autour d'un axe empêché correspond un couple autour de cet axe.

Il existe trois types d'appui plans :

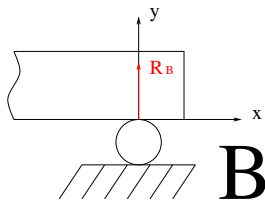
1. Appui double (articulation)



L'appui double empêche la poutre de bouger dans les directions Ox et Oy , mais il ne l'empêche pas de tourner autour de Oz .

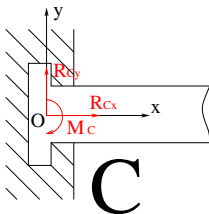
Par conséquent, l'appui exerce deux actions sur la poutre R_{Ax} et R_{Ay} .

2. Appui simple



Le seul mouvement empêché est dans la direction verticale y . Il existe donc une seule action de l'appui sur la poutre : R_B .

3. Encastrement



Tous les mouvements sont empêchés. L'appui exerce donc trois actions sur la poutre : R_{Cx} , R_{Cy} et M_C .

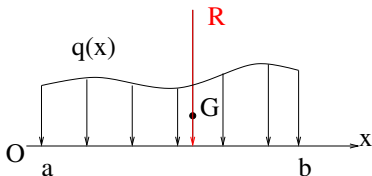
Calcul des actions d'appui

Généralement, les actions d'appui sont inconnues. Pour les déterminer, on doit écrire les trois équations d'équilibre du système:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_O = 0.$$

Remarque

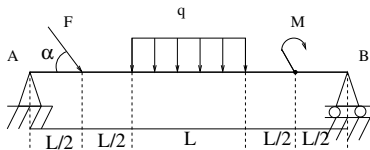
Avant d'écrire les équations d'équilibre, les charges réparties doivent être remplacées par leur résultante, placée en leur barycentre, de telle sorte que son Moment par rapport à n'importe quel point soit égal au Moment de la charge répartie.



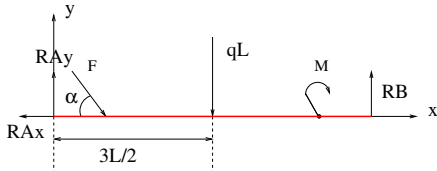
$$R = \int_a^b q(x) dx = \text{Aire de la surface.}$$

$$x_G = \frac{\int_a^b q(x) x ds}{R} = \text{Position du barycentre de la surface.}$$

Exemple



On doit d'abord isoler la barre, et représenter tous les efforts extérieurs appliqués.

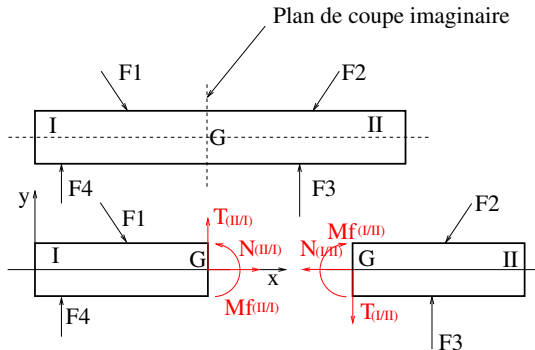


Remarque

Nous avons trois inconnues et trois d'équations d'équilibre. Le système est dit **isostatique**.

Efforts intérieurs ou efforts de cohésion

Les efforts intérieurs ou de cohésion agissent à l'intérieur des poutres et assurent la cohésion de la structure sous l'action des charges extérieures exercées.



$T_{(II/I)}$, $N_{(II/I)}$ et $M_f(II/I)$: Efforts exercés par II sur I.

$T_{(I/II)}$, $N_{(I/II)}$ et $M_f(I/II)$: Efforts exercés par I sur II.

$T_{(II/I)} = -T_{(I/II)}$, $N_{(II/I)} = -N_{(I/II)}$, et $M_f(II/I) = -M_f(I/II)$
(Principe de l'action et de la réaction).

T est appelé **Effort tranchant**.

N est appelé **Effort normal**.

M_f est appelé **Moment fléchissant**

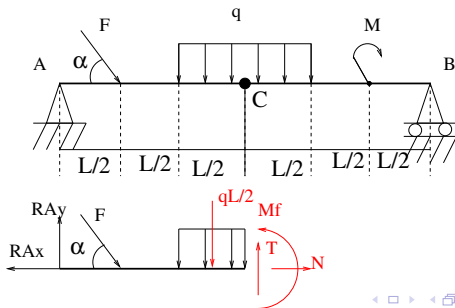
Convention de signe

Les efforts intérieurs **positifs** agissant à droite (gauche) de la partie coupée sont dirigés selon le sens positif (négatif) des axes.

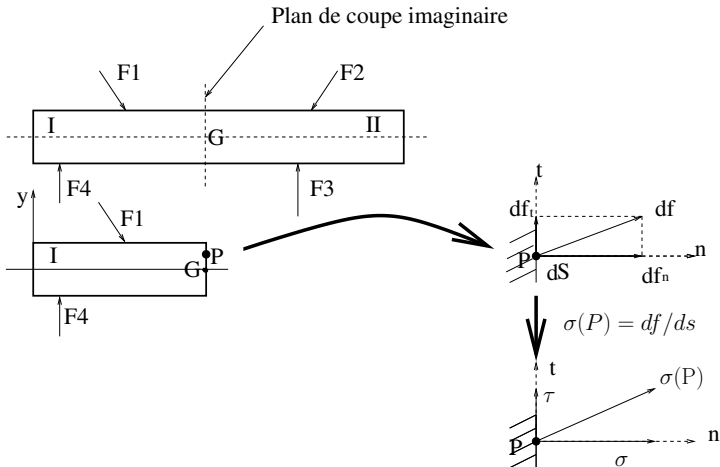
Détermination des efforts intérieurs

Les efforts intérieurs sont déterminés par la résolution des équations d'équilibre de la partie coupée.

Exemple



Contrainte



$\sigma(P)$ [$N/m^2 = Pa$] est appelé **vecteur contrainte** en P.

$\sigma = \frac{df_n}{ds}$ est appelé **contrainte normale** en P.

$\tau = \frac{df_t}{ds}$ est appelé **contrainte tangentielle (de cisaillement)** en P.

Relation entre les efforts intérieurs et les contraintes

T et N représentent les résultantes normales et tangentielles des efforts df en tout point P de S.

$$T = \int_S df_t = \int_S \tau dS$$

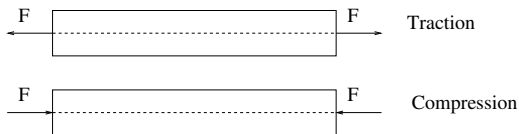
$$N = \int_S df_n = \int_S \sigma dS$$

M_f représente le moment résultant des efforts df en tout point P de S, par rapport à Gz.

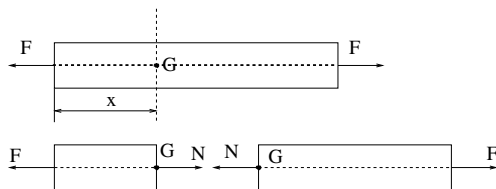
$$M_f = - \int_S df_n y = - \int_S \sigma y dS$$

Définition

Une poutre droite est sollicitée en traction (ou compression) si les efforts extérieurs se réduisent à des forces parallèles à la ligne moyenne et appliqués le long de cette ligne.



Effort normal N

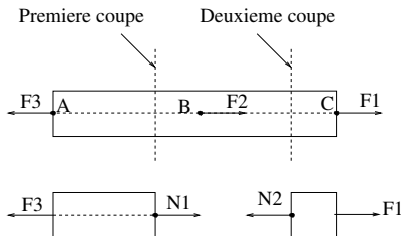


On a $N=F \forall x$. Pour la compression $N=-F$.

Remarque

- S'il n'y a pas d'effort extérieur entre les extrémités de la poutre, N est toujours **constant**.
- Pour la traction N est **positif**. Pour la compression N est **négatif**.

Exemple de cas où N n'est pas constant



On a la condition d'équilibre $F_1 + F_2 = F_3$.

$N_1 = F_3$ $N_2 = F_1$, Effort normal variable dans la poutre.

Diagramme de variation de l'effort normal.

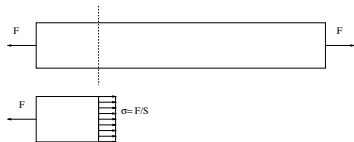


Remarques

- Le **saut** de N en B est égal à $F_3 - F_1 = F_2$, qui est la force appliquée en B .
- Il faut couper **avant** et **après** l'effort concentré.
- Il ne faut pas couper à l'endroit de l'effort concentré car les efforts internes ne sont pas définis.

Contrainte normale σ

Suffisamment loin des points d'application des forces, on suppose que la répartition des contraintes dans une section droite est uniforme.



$$\text{On a } N = \int_S \sigma dS = \sigma \int_S dS = \sigma S \Rightarrow \sigma = \frac{N}{S}$$

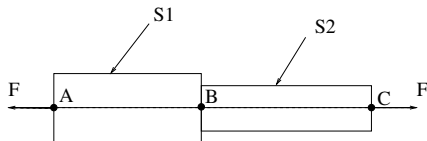
Exemple

Poutre de section circulaire de diamètre $d=20$ mm, $F=6200$ daN, calculer σ .

Remarque

Lorsque N et S sont constants, σ ne varie pas le long de la poutre.

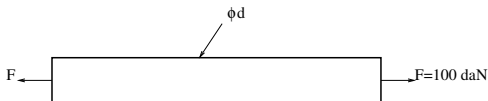
Cas où σ est variable



$N=F$ constant (Le changement de section n'influe pas sur N).

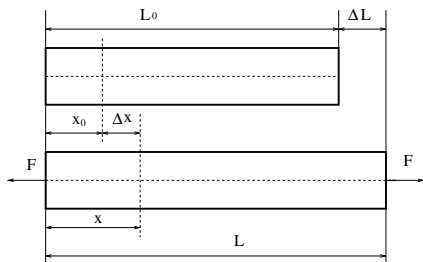
Entre A et B: $\sigma_1 = \frac{N}{S_1}$, entre B et C: $\sigma_2 = \frac{N}{S_2}$ (Le changement de section influe sur σ)

Diagramme de variation de σ :



Déformations

La déformation principale subie par une poutre en traction-compression est un changement de longueur ou **allongement**.



L_0 : longueur initiale de la poutre

L : longueur finale de la poutre

ΔL : allongement total de la poutre

x_0 : longueur initiale du tronçon

x : longueur finale du tronçon

Δx : allongement du tronçon

L'expérience montre que, lorsque σ est constant, les allongements sont proportionnels aux longueurs initiales:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

ε (sans unité) est appelé **allongement relatif** ou **déformation longitudinale** de la poutre

Remarque

Dans les problèmes traités par la RDM ε est **très petite** (de l'ordre de 10^{-3} au maximum).

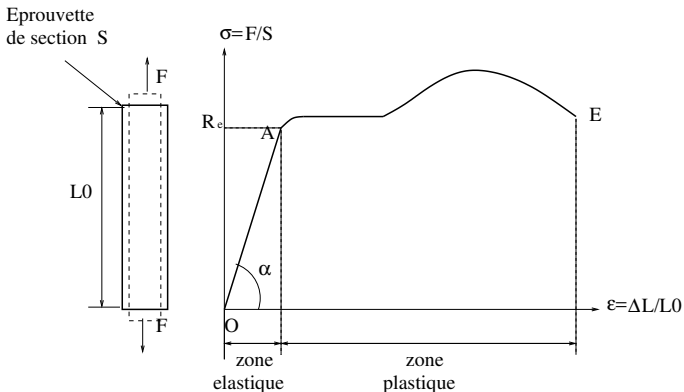
Application

$L_0 = 2800\text{ mm}$ $\Delta L = 4\text{ mm}$ $x_0 = 1000\text{ mm}$ calculer ε et Δx

$$\varepsilon = \frac{4}{2800} = 0,00143 \quad \Delta x = \varepsilon x_0 = 1,43\text{ mm}$$

Relations entre contraintes et déformations

Essai de traction



R_e : limite élastique. R_e est une constante matérielle (Acier $R_e \approx 300\text{MPa}$)

Remarque

Dans la zone élastique, les déformations sont petites.

Loi de Hooke

Dans la zone élastique, la relation entre σ et ε est linéaire.

Avec $E = \tan \alpha$, on a : $\sigma = E\varepsilon$ **Loi de Hooke.**

E : module d'élasticité longitudinal (module de Young) (MPa)

E est une constante matérielle (Acier $E \approx 200 \text{ GPa}$)

Exemple

Poutre de diamètre $d = 28 \text{ mm}$, $\sigma = 100 \text{ MPa}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $L = 2.8 \text{ m}$. Calculer ΔL .

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{100}{200000} = 0,0005$$

$$\Delta L = \varepsilon L = 0.0005 \times 28 = 1.4 \text{ mm}$$

Condition de résistance

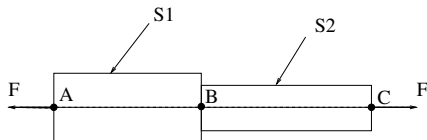
Les structures sont dimensionnées de telle sorte qu'elles restent dans le domaine élastique (pas de déformations permanentes). La condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{S} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

R_{pe} : Résistance pratique à l'extension (ou contrainte admissible).

$s \geq 1$: Coefficient de sécurité.

Exemple1 (Vérification)



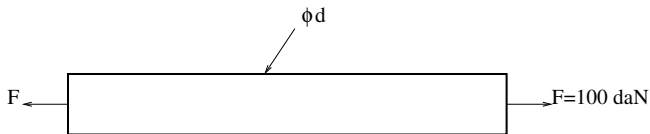
On donne $d_1 = 200\text{mm}$, $d_2 = 100\text{mm}$, $R_{pe} = 100\text{MPa}$, calculer F_{max} .

$$N=F, \sigma_1 = \frac{F}{S_1}, \sigma_2 = \frac{F}{S_2}$$

$$S_1 > S_2 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2 \Rightarrow \sigma_{max} = \sigma_2$$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{S_2} \leq R_{pe} \Rightarrow F \leq R_{pe} \pi \frac{d_2^2}{4} = 785398\text{N} \Rightarrow F_{max} = 785398\text{N}$$

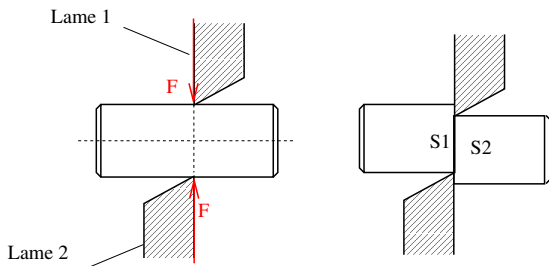
Exemple1 (Dimensionnement)



On donne $R_{pe} = 100 \text{ MPa}$, calculer d_{min} .

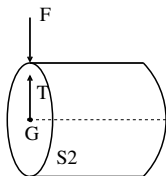
$$N=F, \sigma = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi d^2} \leq R_{pe} \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4F}{R_{pe}}} = d_{min}$$

Exemple 1 : Pièce cisailée



Le cisaillement de la pièce se traduit par le glissement de la section droite S_1 par rapport à la section droite S_2 qui lui est directement en contact.

Effort tranchant T



Le seul effort interne existant est T ($N = M_f = 0$).

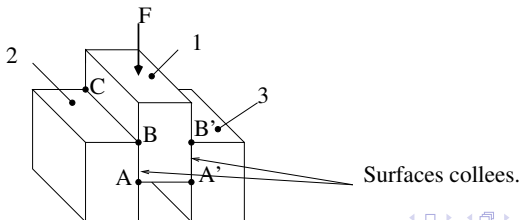
D'après l'équilibre $T = F$.

Exemple 2

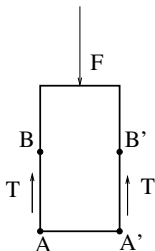
Trois blocs de bois identiques (1), (2) et (3), sont collés.

L'assemblage supporte une charge F suivant son axe de symétrie.

Les surfaces collées sont $ABCD$ et $A'B'C'D'$.



Pour calculer T , on isole le bloc (1) et on étudie son équilibre.



On a $T = \frac{F}{2}$

Remarque

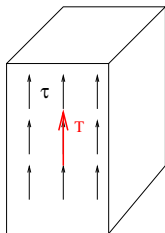
On peut déduire une relation simple entre la force appliquée F et T :

$T = \frac{F}{n}$ où n est le nombre de surfaces cisailées.

Contrainte de cisaillement τ

En cisaillement, les contraintes normales sont nulles.

On suppose que toutes les contraintes tangentielles sont identiques. Autrement dit, il y a une répartition uniforme des contraintes dans la section cisailée.



$$T = \int_S \tau dS = \tau \int_S dS = \tau S \Rightarrow \tau = \frac{T}{S}$$

Exemple

On reprend l'exemple 2 avec $F=200$ daN, $AB=CD=3$ cm, $AD=BC=10$ cm. Calculer τ dans le joint collé.

$$S = 30 \times 100 = 3000 \text{ mm}^2, \quad T = \frac{F}{2} = 1000 \text{ N}$$

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{1000}{3000} = 0.333 \text{ Nmm}^{-2} = 0.333 \text{ MPa}$$

Condition de résistance

$$\tau = \frac{T}{S} \leq R_{pg} \text{ avec : } R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$

R_{pg} : résistance pratique au glissement ou au cisaillement (contrainte admissible).

R_{eg} : limite élastique au cisaillement.

s : Coefficient de sécurité.

Exemple

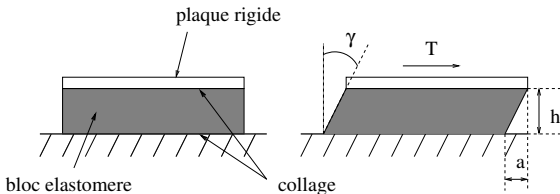
Reprenons l'exemple 2. Si la contrainte admissible dans le joint collé est de 900 kPa, déterminer la charge F maximale supportable

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{F}{2S} = \frac{F}{2 \times 30 \times 100} \leq 0.9 \text{ Nmm}^{-2}$$

$$F \leq 0.9 \times 2 \times 3000 = 5400 \text{ N}.$$

Déformation - Angle de glissement γ

Exemple



La déformation peut être caractérisée par l'angle γ , appelé angle de glissement.

Pour l'exemple $\tan \gamma = \frac{a}{h}$, si γ est petit $\tan \gamma \approx \gamma = \frac{a}{h}$

Relation entre τ et γ

De même que pour la traction, dans le domaine élastique, la relation entre τ et γ est linéaire.

$$\tau = G\gamma$$

γ : angle de glissement (radian)

G : module d'élasticité transversal (MPa)

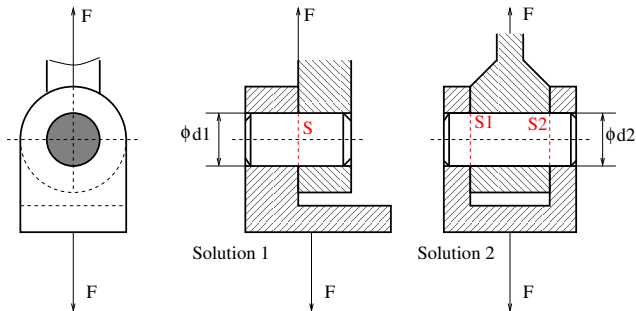
Exemple

Reprenons l'exemple du bloc élastomère ($c \times b \times h$) avec $c=50$, $b=100$ mm et $G=80$ kPa. Déterminons γ si $T=100$ daN et a si $h=25$ mm.

$$\tau = \frac{T}{c \times b} = \frac{1000}{50 \times 100} = 0.2 \text{ Nmm}^{-2}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25 \text{ rad} = 14.3^\circ \text{ et } a = h \tan \gamma = 6.4 \text{ mm.}$$

Calcul des articulations cylindriques



$F=10000$ daN, les axes sont réalisés dans le même acier dont la contrainte admissible en cisaillement est de $5 \text{ daN} \cdot \text{mm}^{-2}$.

Solution 1

Une section cisailée $S \Rightarrow T = F$

$$\tau = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq R_{pg} \Rightarrow d_1 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi R_{pg}}} = 50,5 \text{ mm}$$

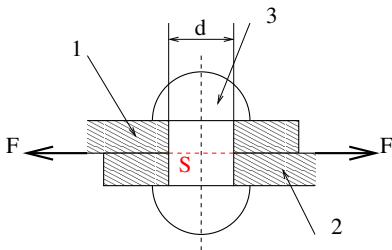
Solution 2

Deux sections cisailées S_1 et $S_2 \Rightarrow T = \frac{F}{2}$

$$\tau = \frac{F}{2S} = \frac{2F}{\pi d_2^2} \leq R_{pg} \Rightarrow d_2 \geq \sqrt{\frac{2F}{\pi R_{pg}}} = 35,7 \text{ mm}$$

Assemblages rivetés et boulonnés - Calcul simplifié

Assemblages rivetés-Exemple

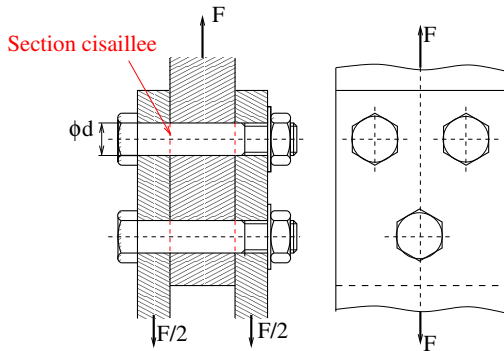


Les barres (1) et (2) sont liées par un rivet (3) en aluminium de diamètre $d = 10 \text{ mm}$ et de résistance à la rupture

$R_{pg} = 10 \text{ daN/mm}^2$. Déterminer l'effort F admissible.

$$T = F, \quad \tau = \frac{F}{S} \leq R_{pg} \Rightarrow F \leq R_{pg} S = 10 \times \left(\frac{\pi \times 10^2}{4} \right) = 785 \text{ daN}$$

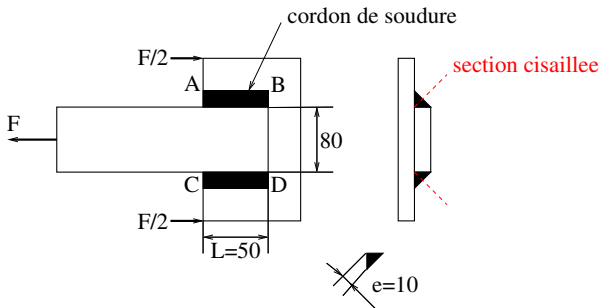
Assemblages boulonnés-Exemple



Pour l'assemblage ci-dessus, à trois boulons en acier, $d = 12 \text{ mm}$, la contrainte admissible au cisaillement des boulons $R_{pg} = 30 \text{ daN.mm}^{-2}$. Déterminer l'effort admissible.

$$T = \frac{F}{6} \quad \tau = \frac{F}{6S} \leq R_{pg} \Rightarrow F \leq 6SR_{pg} = 6 \frac{\pi d^2}{4} R_{pg} = 23358 \text{ daN}$$

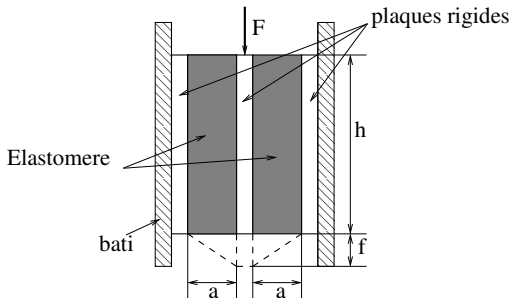
Assemblages soudés-Exemple



La limite admissible au cisaillement du métal d'apport est $R_{pg} = 8 \text{ daN.mm}^{-2}$. Déterminons l'effort F admissible par le montage.

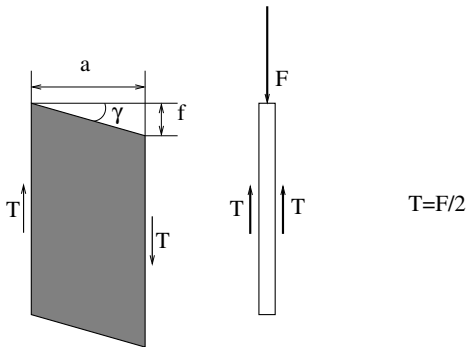
$$T = \frac{F}{2} \quad \tau = \frac{F}{2S} = \frac{F}{2Le} \leq R_{pg} \Rightarrow F \leq R_{pg} 2Le = 8000 daN$$

Exercice 1



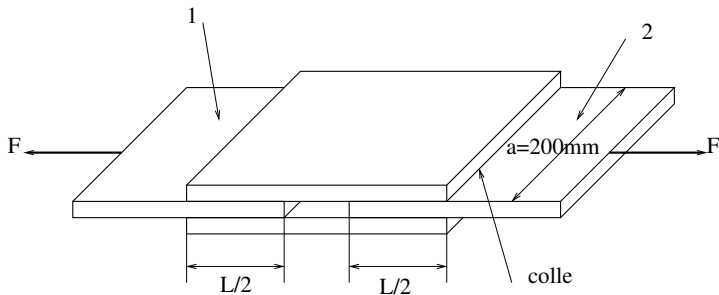
Un amortisseur est réalisé à partir de deux blocs en élastomère parallélépipédiques ($a \times b \times h$) collés sur trois plaques rigides. G est le module de cisaillement. Déterminer la relation entre la flèche f et la force F .

Solution 1



$$\tau = \frac{F}{2S} = G\gamma \simeq G \tan \gamma = G \frac{f}{a} \Rightarrow f = \frac{Fa}{2hbG}$$

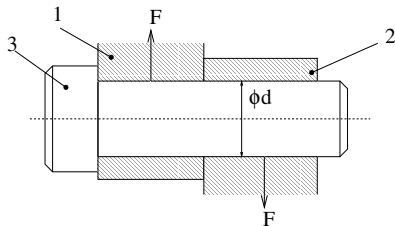
Exercice 2



Les feuilles de plastique 1 et 2 sont collés. La contrainte de cisaillement admissible dans le joint collé est de 8 daN.cm^{-2} . Quelle est la longueur L nécessaire si l'ensemble supporte un effort de traction F de 3000 daN ?

$$T = \frac{F}{2} \quad \tau = \frac{F}{2S} = \frac{F}{La} \leq R_{pg} \Rightarrow L \geq \frac{F}{aR_{pg}}$$

Exercice 3

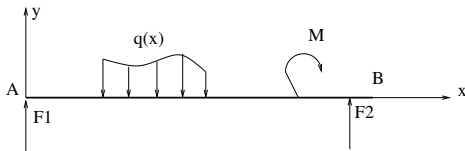


La figure montre une articulation cylindrique entre deux barres plates 1 et 2. La liaison est assurée par un axe cylindrique 3 de diamètre d inconnu. L'effort maximal supportée est de 5000 daN. Pour le matériau de l'axe $R_{pg} = 5 \text{ daN.mm}^{-2}$. Indiquer la section cisailée, et déterminer le diamètre de l'axe.

$$T = F \quad \tau = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi d^2} \leq R_{pg} \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi R_{pg}}}$$

Définition

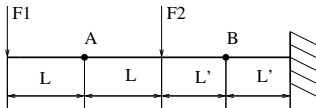
Une poutre est en flexion plane, lorsque toutes les forces extérieures sont perpendiculaires à la ligne moyenne, et tous les couples extérieurs sont autour de l'axe z .



Efforts intérieurs

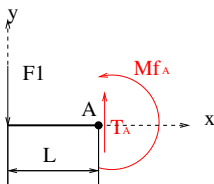
En flexion plane, N est toujours nul, M_f et T sont généralement non nuls.

Exemple



Calculer les efforts intérieurs en A et en B .

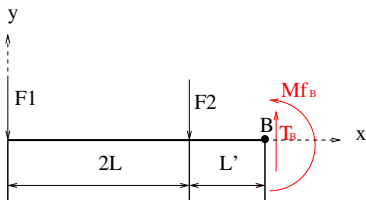
Efforts intérieurs en A



$$\sum F_y = T_A - F_1 = 0 \Rightarrow T_A = F_1$$

$$\sum M_A = M_{fA} + F_1 L = 0 \Rightarrow M_{fA} = -F_1 L$$

Efforts intérieurs en B



$$\sum F_y = T_B - F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow T_B = F_1 + F_2$$

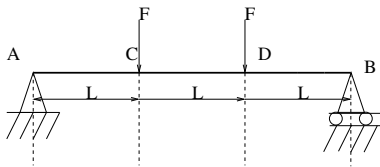
$$\sum M_B = M_{fB} + F_1(2L + L') + F_2 L' = 0 \Rightarrow M_{fB} = -F_1(2L + L') - F_2 L'$$

Remarque

$T_A \neq T_B$ et $M_{fA} \neq M_{fB} \Rightarrow$ généralement les efforts intérieurs en flexion plane sont variables dans la poutre.

Pour déterminer les efforts intérieurs maximums, nous devons tracer les **diagrammes de variation** de T et M_f .

Exemple 1

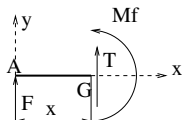


Actions d'appui

On peut montrer que $R_{Ax} = 0$, $R_{Ay} = R_B = F$

On fait une première coupe entre A et C.

$x \in [0, L]$

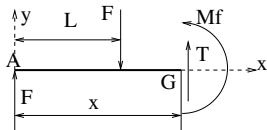


$$\sum F_y = F + T = 0 \Rightarrow T = -F$$

$$\sum M_G = M_f - Fx = 0 \Rightarrow M_f = Fx = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ FL & x = L \end{cases}$$

On fait une coupe entre C et D.

$$x \in [L, 2L]$$

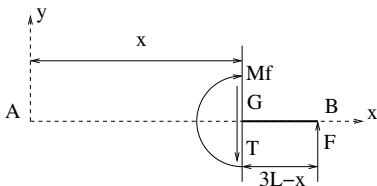


$$\sum F_y = F + T - F = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$\sum M_G = M_f - Fx + F(x - L) = 0 \Rightarrow M_f = FL$$

On fait une coupe entre D et B.

$$x \in [2L, 3L]$$

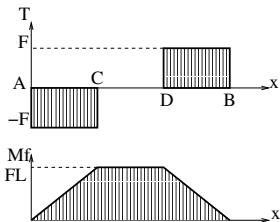


$$\sum F_y = F - T = 0 \Rightarrow T = F$$

$$\sum M_G = M_f - F(3L - x) = 0 \Rightarrow M_f = F(3L - x) =$$

$$\begin{cases} FL & x = 2L \\ 0 & x = 3L \end{cases}$$

Diagrammes de T et M_f



Remarques

- On doit faire des coupes entre les charges **concentrées**.
- On ne doit pas couper au point d'application de la charge concentrée car les efforts internes y sont indéterminés.
- Au niveau des charges concentrées, les efforts intérieurs présentent un **saut** égal (en valeur absolue) à la valeur de la charge concentrée.
- Au niveau des appuis, les efforts intérieurs sont égaux aux efforts extérieurs appliqués (en valeur absolue).

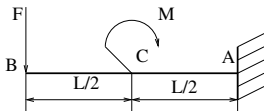
Correspondance entre les diagrammes

On peut montrer qu'il existe des relations entre T , M_f et $q(x)$

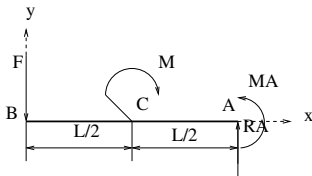
données par:

$$\frac{dT}{dx} = q(x) \quad \frac{dM_f}{dx} = -T$$

Exemple 2



Actions d'appui

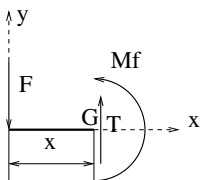


$$\sum F_y = -F + R_A = 0 \Rightarrow R_A = F$$

$$\sum M/A = M_A - M + FL = 0 \Rightarrow M_A = M - FL$$

On fait une coupure entre B et C.

$$x \in [0, L/2]$$

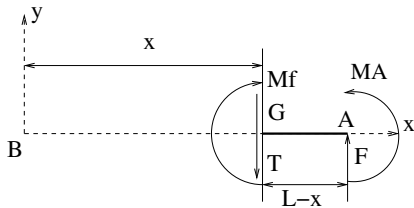


$$\sum F_y = -F + T = 0 \Rightarrow T = F$$

$$\sum M/G = M_f + Fx = 0 \Rightarrow M_f = -Fx = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ -FL/2 & x = L/2 \end{cases}$$

On fait une coupure entre C et A.

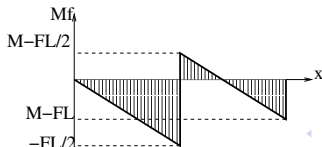
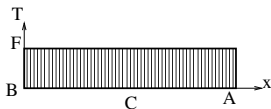
$$x \in [L/2, L]$$



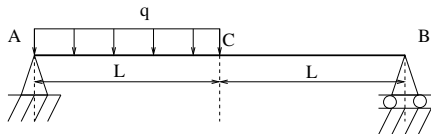
$$\sum F_y = F - T = 0 \Rightarrow T = F$$

$$\sum M/G = -M_f + F(L-x) + M_A = 0 \Rightarrow M_f = M_A + F(L-x) =$$

$$M - Fx = \begin{cases} M - FL/2 & x = L/2 \\ M - FL = M_A & x = L \end{cases}$$

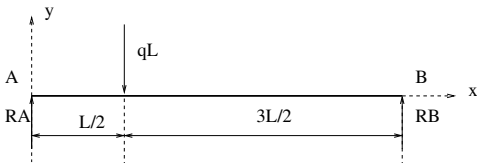


Exemple 3



On donne $q = 50 \text{ daN.m}^{-1}$, $L = 2 \text{ m}$.

Actions d'appui



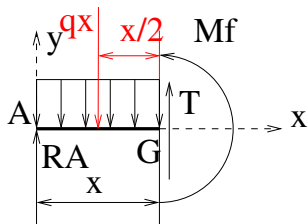
$$\sum F_y = R_A + R_B - qL = 0$$

$$\sum M/A = R_B 2L - qL L/2 = 0 \Rightarrow R_B = qL/4 = 25 \text{ daN} \quad R_A =$$

$$qL - R_B = 75 \text{ daN}$$

On fait une coupe entre A et C.

$x \in [0, L]$



$$\sum F_y = R_A + T - qx = 0 \Rightarrow T = qx - R_A =$$

$$\begin{cases} -R_A = -75 \text{ daN} & x = 0 \\ qL - R_A = 25 \text{ daN} & x = L \end{cases}$$

$$\sum M/G = M_f + qx \cdot x/2 - R_A x = 0 \Rightarrow M_f = R_A x - qx^2/2 =$$

$$\begin{cases} 0 & x = 0 \\ R_A L - qL^2/2 = 50 \text{ daN.m} & x = L \end{cases}$$

Remarque

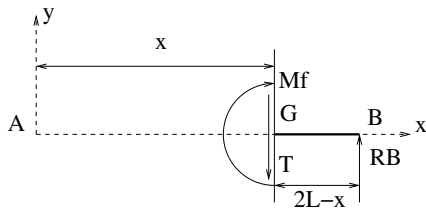
Puisque $\frac{dM_f}{dx} = -T$, $T=0$ correspond à un **extremum** de M_f . A chaque fois que T change de signe dans un intervalle, il faut trouver le point x_0 tel que $T(x_0) = 0$.

$$T(x_0) = qx_0 - R_A = 0 \Rightarrow x_0 = R_A/q = 1.5m$$

$$M_f(x_0) = R_A x_0 - qx_0^2/2 = 56.25 daN.m$$

On fait une coupe entre C et B.

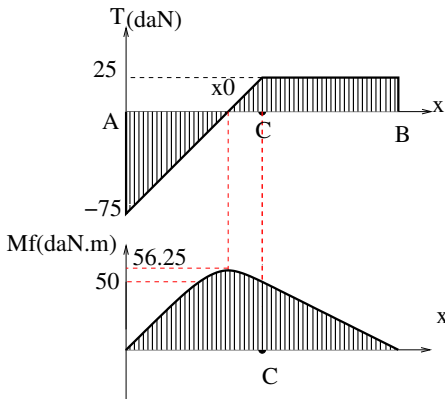
$$x \in [L, 2L]$$



$$\sum F_y = R_B - T = 0 \Rightarrow T = R_B = 25 daN$$

$$\sum M/G = -M_f + R_B(2L - x) = 0 \Rightarrow M_f = R_B(2L - x) =$$

$$\begin{cases} R_B L = 50 \text{ daN.m} & x = L \\ 0 & x = 2L \end{cases}$$



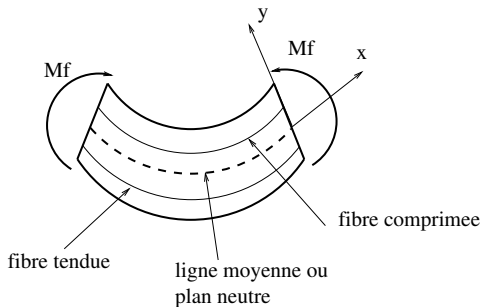
Remarques

- En l'absence de charges concentrées, il n'y a pas de **saut** dans les diagrammes.
- Quand T varie linéairement, la variation de M_f est parabolique.
- Quand T est constant, la variation de M_f est linéaire.
- Quand T est nul, M_f est constant.
- Quand T est positif, $M_f(x)$ est une fonction décroissante.
- Quand T est négatif, $M_f(x)$ est une fonction croissante.

Contraintes normales

Les contraintes normales résultent du M_f et les efforts tranchants n'ont aucun effet sur leur valeur.

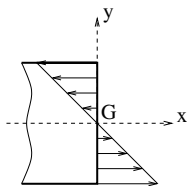
Dans le cas de la flexion pure, les poutres se déforment suivant des arcs de cercle.



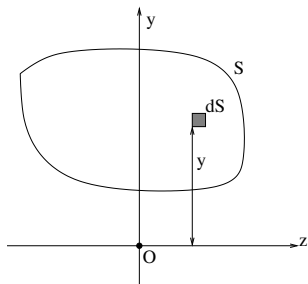
Constatations

- La ligne moyenne ne subit ni allongement ni raccourcissement ($y = 0 \Rightarrow \sigma = 0$).
- Quand M_f est positif, les fibres situées au dessus de la ligne moyenne sont comprimées et supportent des contraintes de compression ($y > 0 \Rightarrow \sigma < 0$). Celles situées au dessous sont tendues et supportent des contraintes de traction ($y < 0 \Rightarrow \sigma > 0$).

En utilisant la loi de Hooke, on montre que : $\sigma = -\frac{M_f}{I_z} y$
 I_z : Moment d'inertie de la section droite par rapport à l'axe Gz.



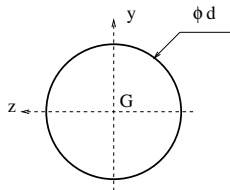
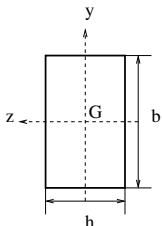
Moment d'inertie d'une surface



Le moment d'inertie de S par rapport à Oz est défini par :

$$I_z = \int_S y^2 dS \quad (m^4)$$

Sections courantes



Pour la section rectangulaire : $I_z = \frac{bh^3}{12}$

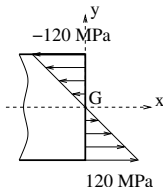
Pour la section circulaire : $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$

Exemple

Déterminons les contraintes normales dans une poutre rectangulaire 50×120 mm, soumise à un moment fléchissant de 14,4 kNm constant sur toute sa longueur.

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{50 \times 120^3}{12} = 7,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = -\frac{14400000}{7,2 \times 10^6} \times y = -2y \text{ MPa}$$



Condition de résistance

La contrainte maximale σ_{max} dans la section droite **la plus chargée** ou section **dangereuse** doit rester inférieure à la contrainte admissible R_{pe} .

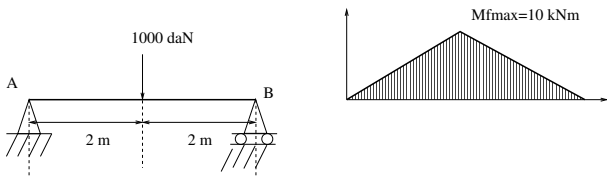
Il faut donc faire les deux opérations suivantes :

- 1 Déterminer la section la plus chargée : c'est la section du M_{fmax} .
- 2 Vérifier que la contrainte maximale dans cette section est inférieure à la contrainte admissible R_{pe} .

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{I_z} y_{max} \leq R_{pe}, \quad M_{fmax} \text{ en valeur absolue}$$

Exemple

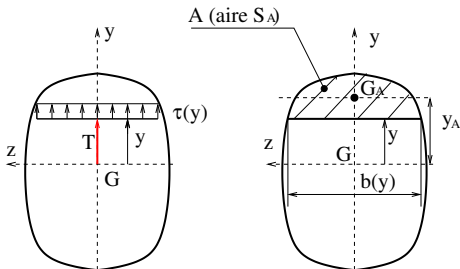
Poutre de section circulaire de diamètre d . On donne $R_{pe} = 100 \text{ MPa}$. Calculer le diamètre minimal.



$$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{\pi d^4/64} \frac{d}{2} = \frac{32 M_{fmax}}{\pi d^3} \leq R_{pe} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{fmax}}{\pi R_{pe}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 10^7}{\pi 100}} = 100.62 \text{ mm}$$

Contraintes de cisaillement

La présence de l'effort tranchant T , implique l'existence de contraintes de cisaillement.

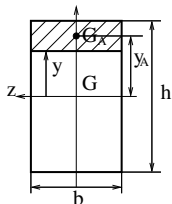


Les contraintes de cisaillement dépendent de y et ne dépendent pas de z . La contrainte τ est donnée par :

$$\tau = \frac{T Q_A}{I_z b}$$

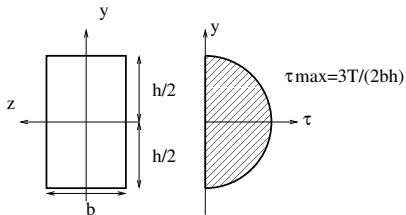
$Q_A = y_A S_A$: moment statique de l'aire hachurée A , où y_A est la distance entre Gz et le barycentre de la surface A .

Cas des sections rectangulaires



$$Q_A = y_A S_A = \frac{\frac{h}{2} + y}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) b = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

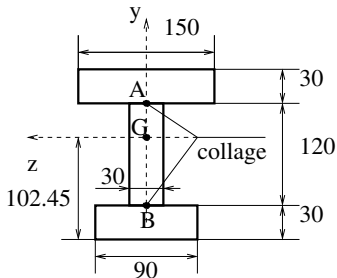
$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad \tau = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$



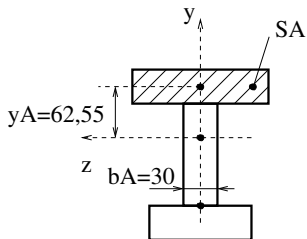
Remarque : La contrainte de cisaillement est toujours nulle en haut et en bas de la section.

Exemple

Un profilé est réalisé à partir de trois plats rectangulaires d'épaisseur 30 mm, collés ensemble en A et B. Si $T = 13,5$ kN, déterminons les contraintes de cisaillement dans les joints collés. On donne : $I_z = 43,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$



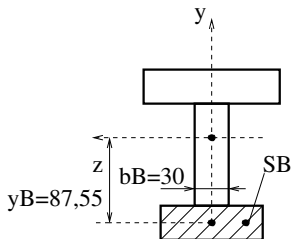
Contraintes en A



$$Q_A = S_A \cdot y_A = 150 \times 30 \times 62,55 = 281475 \text{ mm}^3$$

$$\tau_A = \frac{TQ_A}{I_z b_A} = \frac{13500 \times 281475}{43,7 \times 10^6 \times 30} = 2,9 \text{ MPa}$$

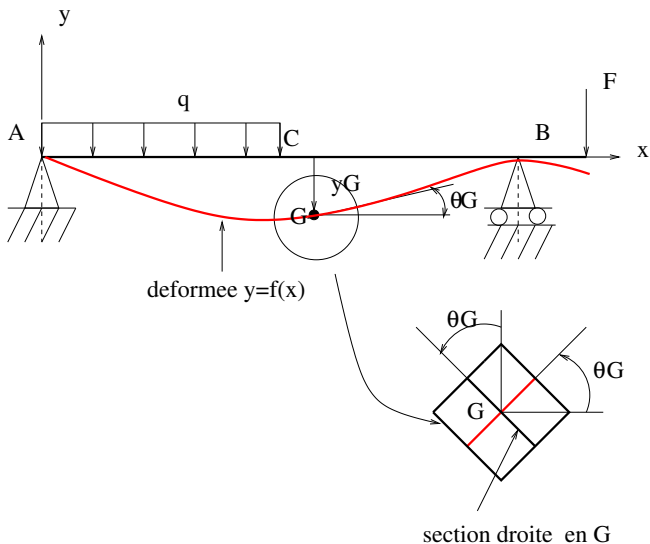
Contraintes en B



$$Q_B = S_B \cdot y_B = 90 \times 30 \times 87,55 = 236155 \text{ mm}^3$$

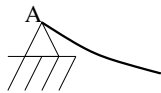
$$\tau_B = \frac{T Q_B}{I_z b_B} = \frac{13500 \times 236155}{43,7 \times 10^6 \times 30} = 2,4 \text{ MPa}$$

Notion de déformée

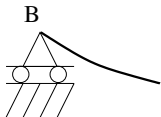


- La courbe de la ligne moyenne après déformation est appelée **déformée**.
- $y = f(x)$ est l'équation mathématique de la déformée.
- En tout point G quelconque, $y_G = f(x_G)$ est appelée **flèche** en G. La pente de la tangente à la déformée en G est $\tan \theta_G \approx \theta_G$ (petites déformations). Elle est égale à la dérivée de $f(x)$ en x_G : $\theta_G = f'(x_G)$
- Puisque les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne, en tout point G, θ_G est égale à la rotation de la section droite en G par rapport à G_z . Pour cette raison θ_G est appelée **rotation** en G.
- Les conditions aux limites sont des éléments connus de la déformée. Ces éléments sont imposés par les appuis A et B ou par la forme de la déformée.

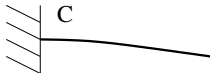
Conditions aux limites aux appuis



Appui double $y_A=0$



Appui simple $y_B=0$



Encastrement $y_C=0$ $\theta_C=0$

Équation de la déformée - Méthode de la double intégration

Connaissant l'équation du moment fléchissant en fonction de x , la rotation θ et la déformée y sont obtenues par intégrations successives à partir de :

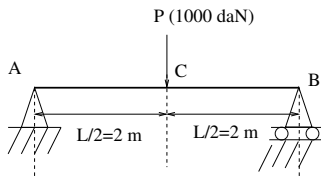
$M_f = Ely''$ avec $I = I_z$: moment d'inertie.

$\int Ely'' dx = EI \int y'' dx = Ely' = \int M_f(x) dx + C_1$ En supposant que EI est constant.

$EI \int y' dx = Ely = \int (\int M_f(x) dx) dx + C_1x + C_2$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 sont calculées à partir des conditions aux limites imposées par les appuis ou la forme générale de la déformée.

Exemple 1



Déterminer l'équation de la déformée $y=f(x)$.

$$R_A = R_B = P/2$$

A cause de la symétrie du problème, il suffit de limiter l'étude à la déformée du tronçon AC.

$$x \in [0, L/2]$$

$$M_f = (P/2).x$$

Équation de la déformée

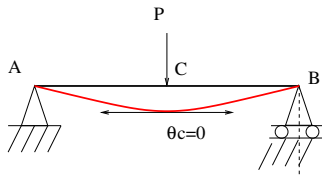
$$M_f = Ely'' = (P/2).x$$

Intégrons une première fois : $Ely' = Px^2/4 + C_1$

Intégrons une deuxième fois : $Ely = Px^3/12 + C_1x + C_2$

Pour $x = 0, y = 0$; il en résulte que $C_2 = 0$.

Le seul autre élément connu de la déformée y est la pente de la tangente au point C. En C, la tangente est horizontale : $x = L/2, y' = \theta_C = 0$.



Résultats

$$y' = \frac{P}{4EI} \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) \quad y = \frac{P}{4EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{L^2 \cdot x}{4} \right)$$

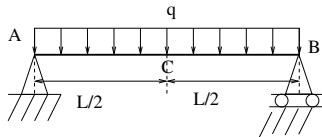
La flèche maximale est obtenue pour $x = L/2$: $f_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$

Application numérique

$P = 1000 \text{ daN}$, $E = 20000 \text{ daN.mm}^{-2}$, $L = 4000 \text{ mm}$ et $I = 869 \text{ cm}^4$.

$$f_{max} = -7,67 \text{ mm.}$$

Exemple 2



$$x \in [0, L] \quad M_f = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_f = Ely'' = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}$$

$$Ely' = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$Ely = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$$

Pour $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

pour C_2 , on peut utiliser $y' = 0$ pour $x = L/2$, ou $y=0$ pour $x = L$.

On obtient : $C_1 = -\frac{qL^3}{24}$

Résultats

$$y' = \frac{q}{EI} \left(\frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{L^3}{24} \right) \quad y = \frac{q}{24EI} (2Lx^3 - x^4 - L^3x)$$

La flèche maximale est obtenue pour $x = L/2$: $f_{max} = -\frac{5qL^4}{384EI}$

Pente maximale en A (ou en B) :

$$\theta_A = -\theta_B = y'(0) = -y'(L) = -\frac{qL^3}{24EI}$$

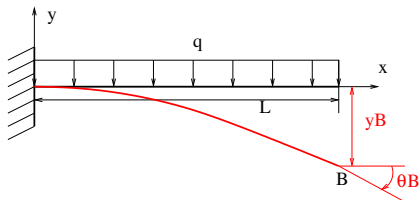
Application numérique

$q = 250 \text{ daN.m}^{-1}$, $E = 20000 \text{ daN.mm}^{-2}$, $L = 4000 \text{ mm}$ et $I = 869 \text{ cm}^4$.

$$f_{max} = -4,8 \text{ mm.}$$

$$\theta_A = -\theta_B = -0,0038 \text{ rad} = -0,22^\circ.$$

Exemple 3



$$x \in [0, L] \quad M_f = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_f = Ely'' = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2}$$

$$Ely' = -\frac{qL^2x}{2} + \frac{qLx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$Ely = -\frac{qL^2x^2}{4} + \frac{qLx^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$$

Pour $x = 0$, $y = 0$, il en résulte $C_2 = 0$

Pour $x = 0$, $y' = 0$, il en résulte $C_1 = 0$

Résultats

$$y' = \frac{qx}{6EI} (-x^2 + 3Lx - 3L^2) \quad y = \frac{qx^2}{24EI} (-x^2 + 4Lx - 6L^2)$$

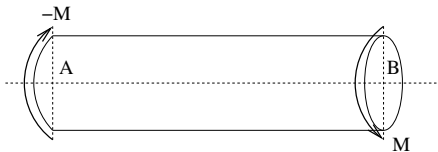
La flèche est maximale en B ainsi que l'angle θ .

$$y_B = -\frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_B = -\frac{qL^3}{6EI}$$

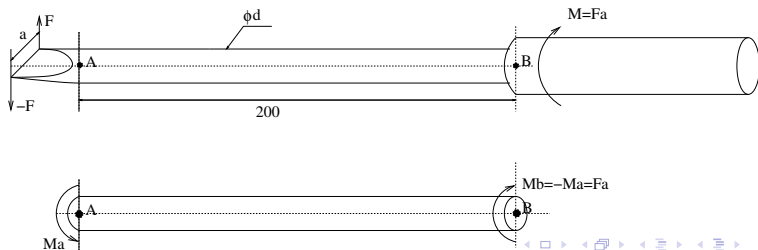
Chapitre VII : Torsion des poutres à section circulaire

Définition

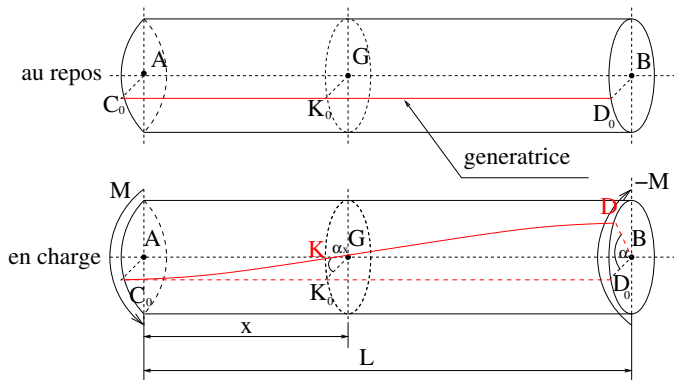
Une poutre droite est sollicitée en torsion chaque fois que les actions aux extrémités se réduisent à deux couples M et $-M$ égaux et opposés d'axe la ligne moyenne L_m .



Exemple : tige de tournevis



Déformations



$$\alpha_x = \text{angle}(GK_0, GK) \quad \alpha = \text{angle}(BD_0, BD)$$

α est appelé **angle de torsion de la poutre**.

- La longueur fibres ou génératrices reste sensiblement constante (petites déformations).
- Les sections droites tournent ou glissent les unes par rapport autres.

Angle unitaire de torsion θ

Nous avons la relation suivante:

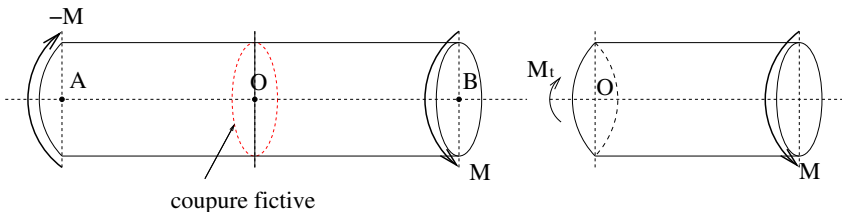
$$\frac{\alpha}{L} = \frac{\alpha_x}{x} = \theta : \text{angle unitaire de torsion}$$

Exemple

Reprenons l'exemple du tournevis avec $M = 24 \text{ Nm}$, si l'angle de torsion $\alpha_{AB} = 14,6^\circ$; déterminons θ .

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}} = 0,073^\circ . \text{mm}^{-1} \\ &= 73^\circ . \text{m}^{-1} = \frac{73 \cdot \pi}{180} = 1,274 \text{rad} . \text{m}^{-1}\end{aligned}$$

Efforts intérieurs - Moment de torsion M_t



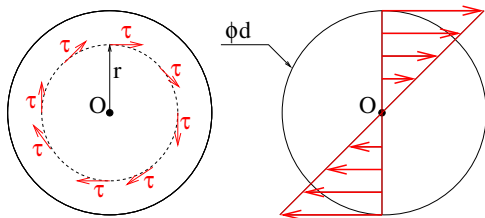
D'après l'équilibre, on a : $M_t = M$

Remarques

- Le sens (ou le signe) de M_t n'est pas important.
- En torsion, tous les autres efforts intérieurs sont nuls ($N=T=M_f=0$).

Contraintes tangentielles de torsion τ

En torsion, les contraintes normales sont nulles. A cause de la rotation des sections les unes par rapport aux autres, les contraintes tangentielles dans la section sont perpendiculaires au rayon r et ne dépendent que de r : $\tau = \tau(r)$.



On peut montrer que : $\tau = G\theta r$.

Remarques

- Tous les points situés sur un même cercle de centre O et de rayon r ont même contrainte.
- Les contraintes sont maximales à la périphérie pour

$$r_{max} = d/2 \quad \tau_{max} = G\theta d/2$$

Exemple

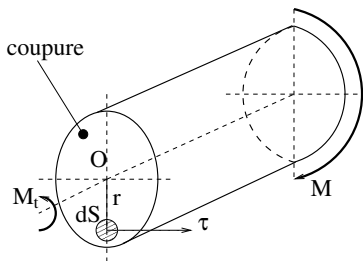
cas de la tige de tournevis, $G = 80 \text{ GPa}$, $\theta = 1,274 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{mm}^{-1}$.

Déterminons la contrainte de cisaillement maximale dans la tige.

Diamètre de la tige : $d = 7 \text{ mm}$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = G\theta d/2 = 80000 \times 1,274 \cdot 10^{-3} \times 3.5 = 356 \text{ MPa}$$

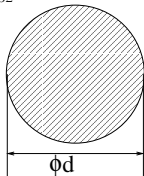
Relation entre M_t et τ



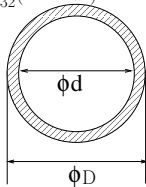
$$M_t = \int_S r \tau dS = \int_S G\theta r^2 ds = G\theta \int_S r^2 dS$$

$$M_t = G\theta I_0 \quad \theta \text{ en rad/m}$$

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$



$$I_0 = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$



Exemple

Cas de la tige de tournevis, $M_t = 24 Nm$, $d = 7 mm$, $G = 80 GPa$.
Déterminons l'angle de torsion unitaire.

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} = 235.7 mm^4$$

$$\theta = \frac{M_t}{G I_0} = \frac{24000}{80000 \cdot 235,7} = 0,00127 rad \cdot mm^{-1}$$

Relation entre τ et M_t

A partir de $\tau = G\theta r$ et $M_t = G\theta l_0$, on peut écrire : $G\theta = \frac{\tau}{r} = \frac{M_t}{l_0}$

On obtient ainsi :

$$\tau = \frac{M_t}{l_0} \times r$$

Exemple

Cas du tournevis, $M_t = 24Nm$, $d = 7$ mm. Déterminons la contrainte maximale.

$$l_0 = 235,7mm^4 \quad \text{et} \quad \tau = \frac{24000}{235,7} \times r = 102 \times r \quad N.mm^{-2}$$

$$\tau_{max} = 102 \times r_{max} = 102 \times 3,5 = 356 \quad N.mm^{-2}$$

Condition de résistance

La contrainte de cisaillement maximale ne doit pas dépasser la contrainte admissible en cisaillement :

$$\tau_{max} \leq R_{pg}$$

Exemple

Si, pour le tournevis, on impose une contrainte admissible au cisaillement de 200 MPa, déterminons la valeur minimale du diamètre d lorsque $M_t^{max} = 24 \text{ N.m}$.

$$\tau_{max} = \frac{24000}{\frac{\pi d^4}{32}} \times \frac{d}{2} = \frac{24000 \times 16}{\pi d^3} \leq R_{pg} = 200$$

$$d^3 \geq \frac{24000 \times 16}{\pi \times 200} \quad \text{et} \quad d \geq 8,5 \text{ mm}$$

Application : comparaison entre arbre plein et arbre creux

Soit deux arbres de transmission construits à partir du même acier, $G = 8000 \text{ daN.mm}^{-2}$. Le premier est plein (diamètre d_1); le second est creux (diamètre extérieur D , diamètre intérieur $d = 0.8D$). Le couple à transmettre est de 200 Nm; la contrainte admissible pour l'acier est de 10 daN.mm^{-2} . Déterminons les dimensions optimales des deux arbres et comparons les poids respectifs des deux structures.

Arbre plein

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_0} \times \frac{d}{2} = \frac{16 M_t}{\pi d_1^3} \leq R_{pg} \quad d_1^3 \geq \frac{20000 \cdot 16}{10 \cdot \pi} = 21.67 \text{ mm}$$

Section de l'arbre : $S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = 369 \text{ mm}^2$

Arbre creux

$$I_0 = \frac{\pi D^4}{32} (1 - 0,8^2) = 0,59 \frac{\pi D^4}{32} \quad \tau_{max} = \frac{M_t}{I_0} \times \frac{D}{2} = \frac{20000 \cdot 16}{\pi \cdot D^3 \cdot 0,59} \leq R_{pg}$$

$$D^3 \geq \frac{20000 \cdot 16}{\pi \cdot 10 \cdot 0,59} \quad D \geq 25,83 \text{ mm} \quad \text{avec} \quad d = 20.67 \text{ mm}$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 188,78 \text{ mm}^2$$

Comparaison des poids

$$r = \frac{\text{poids arbre creux}}{\text{poids arbre plein}} = \frac{\rho S_2 L}{\rho S_1 L} = \frac{S_2}{S_1} = 0,51$$

Exercice

Soit une poutre cylindrique en cuivre de 25 mm de diamètre soumise à un couple de 210 Nm. L'angle de torsion mesuré est de 4,9 degrés pour une longueur de 1 m.

- 1 Calculer le module de cisaillement G du cuivre utilisé.
- 2 Déterminer l'angle de torsion du même matériau, de même diamètre et de longueur 1,8 m, si elle supporte une contrainte maximale de 140 N.mm^{-2} .

$$\theta = \frac{4,9 \cdot \pi}{180 \cdot 1000} = 0,0855 \times 10^{-3} \text{ rad/mm}, \quad I_0 = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 38349 \text{ mm}^4$$

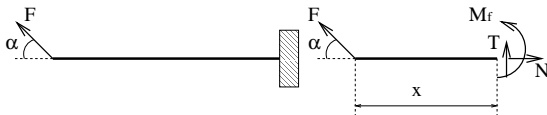
$$M_t = G\theta I_0 \Rightarrow G = \frac{210000}{0,0855 \times 10^{-3} \times 38349} = 64 \text{ GPa}$$

$$\tau_{max} = G\theta' d/2 \Rightarrow \theta' = \frac{2 \cdot 140}{64000 \times 25} = 0,000175 \text{ rad/mm}$$

$$\alpha = \theta' \cdot L = 0,000175 \times 1800 = 0,315 \text{ rad}$$

Flexion + traction (compression)

Exemple



$$T = -F \sin \alpha \quad N = F \cos \alpha \quad M_f = F \sin \alpha \cdot x$$

Dans ce cas, nous constatons l'existence de N (traction-compression) et de $M_f + T$ (flexion simple).

Contraintes

Pour calculer les contraintes, nous appliquons le **principe de superposition**:

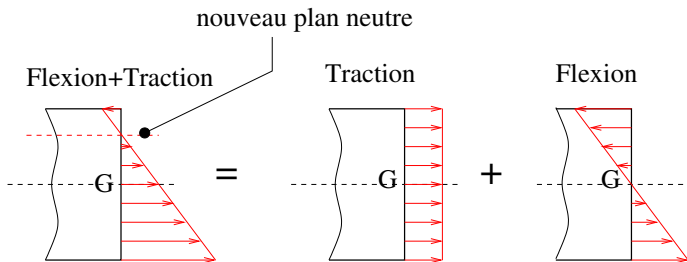
$$\boxed{\text{Flexion} + \text{Traction}} = \boxed{\text{Traction}} + \boxed{\text{Flexion}}$$

Contraintes normales

Contraintes tangentielles

$$\tau = \frac{T.Q}{I_z.b}$$

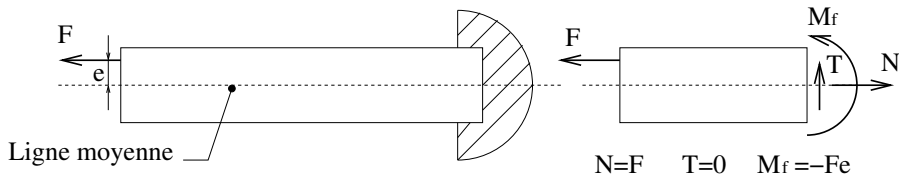
Répartition des contraintes normales



Remarque

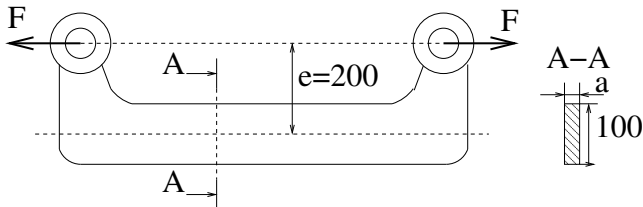
Il y a déplacement du plan neutre et celui-ci ne passe plus par le barycentre G de la section comme dans le cas de la flexion.

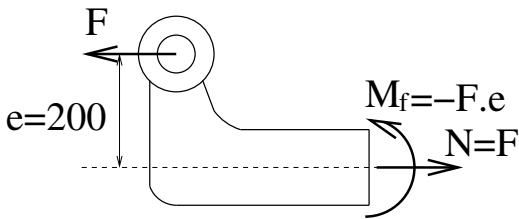
Exemple : Poutres avec charge axiale excentrée



Exercice

Une bielle coudée supporte deux forces égales et opposées d'intensité 15 kN. Si la contrainte normale admissible est de 100 MPa, déterminer l'épaisseur a du profil.





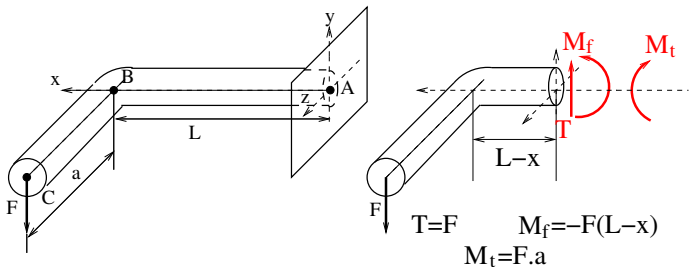
$$\sigma = \frac{N}{S} - \frac{M_f}{I_z} \times y = \frac{F}{100.a} + \frac{F.e}{\frac{a.100^3}{12}} \times y$$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{100.a} + \frac{F.e}{\frac{a.100^3}{12}} \times 50 \leq R_{pe}$$

$$a \geq \frac{F}{R_{pe}} \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{12.e}{100^3} \cdot 50 \right) = \frac{15000}{100} \left(\frac{1}{100} + \frac{12.200}{100^3} \cdot 50 \right) = 19,5 \text{ mm}$$

Flexion + torsion

Exemple



Le tronçon AB de la poutre est à la fois sollicité en torsion et en flexion.

Contraintes

Contrainte normale due à la flexion : $\sigma = -\frac{M_f}{I_z} \times y$

Contrainte de cisaillement due à la torsion : $\tau = \frac{M_t}{I_0} \times r$

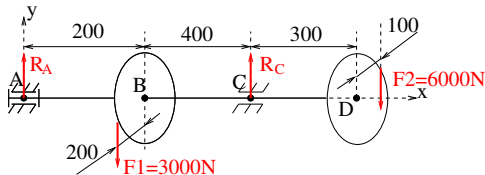
Condition de résistance pour un arbre circulaire de diamètre d

On définit le **Moment de torsion idéal** par : $M_{ti} = \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$

La condition de résistance s'écrit (critère de Tresca):

$$\tau_{max} = \frac{M_{ti}^{max}}{I_0} \times \frac{d}{2} = \frac{16 M_{ti}^{max}}{\pi d^3} \leq R_{pg}$$

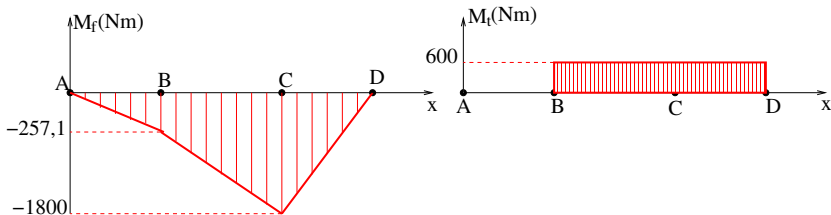
Exemple



Un arbre de transmission ABCD, de diamètre d , est guidé en rotation en A et C par deux paliers à roulements et porte en B et D deux roues dentées supportant les charges indiquées de direction verticale y.

- 1 Déterminer les diagrammes des M_f et M_t entre A et D.
- 2 Sachant que la contrainte admissible en cisaillement est de 60

Les actions d'appui : $R_A = -857 \text{ N}$ $R_C = 9857 \text{ N}$.

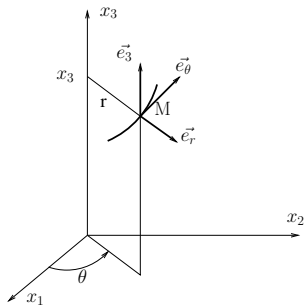


Au point C on a:

$$M_{ti}^{max} = \sqrt{(M_f^{max})^2 + M_t^2} = \sqrt{1800^2 + 600^2} = 1897,37 \text{ N.m}$$

$$\frac{16 M_{ti}^{max}}{\pi d^3} \leq R_{pg} \Rightarrow d \geq^3 \sqrt{\frac{16 M_{ti}^{max}}{\pi R_{pg}}} =^3 \sqrt{\frac{16 \cdot 1897,37 \cdot 1000}{\pi \cdot 60}} = 54,4 \text{ mm}$$

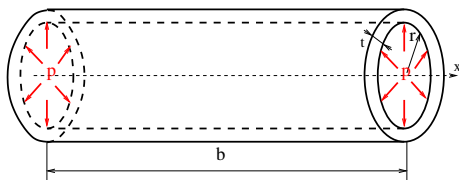
Coordonnées cylindriques



$$M(r, \theta, x_3)$$

Si on fixe r , et on fait varier θ et x_3 on obtient une surface cylindrique. $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3)$ constitue un repère local, car \vec{e}_r et \vec{e}_θ varient avec le point M .

Cylindre ouvert à paroi mince sous pression



Cylindre à paroi mince $\iff \frac{t}{r} \leq 0.1$

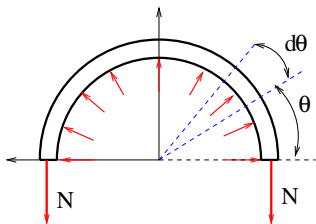
On suppose que la contrainte est uniforme dans toute l'épaisseur de la paroi.

Puisque le cylindre est libre de se déformer longitudinalement :

$$\sigma_x = 0.$$

Puisque l'épaisseur est faible, la contrainte radiale σ_r est négligée.

Sous l'effet de la pression, le diamètre augmente. Il existe donc une contrainte circonférentielle σ_θ . Pour la déterminer, On étudie l'équilibre du demi-cylindre :

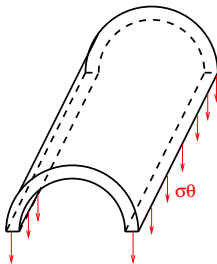


Évaluation de N

L'équilibre des forces verticales donne :

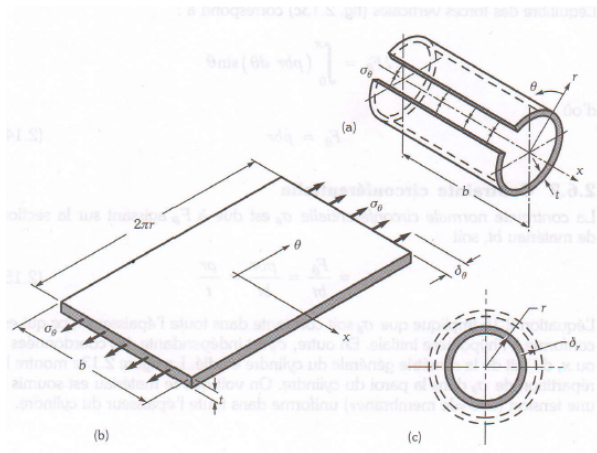
$$2N = \int_0^{\pi} pbr \sin \theta d\theta \implies N = pbr$$

Contrainte circonférentielle



$$\sigma_\theta = \frac{N}{bt} = \frac{pr}{t}$$

Étude des allongements



La Figure (b) représente une plaque en traction simple.
L'allongement circonférentiel δ_θ est donné par :

$$\delta_\theta = \frac{\sigma_\theta 2\pi r}{E} = \frac{2\pi r^2 p}{tE}$$

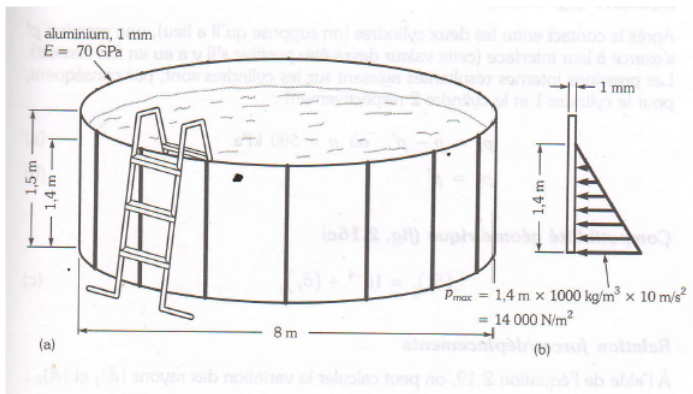
La variation du rayon δ_r (Figure(c)) s'obtient de la manière suivante:

$$\text{périmètre final} = 2\pi r + \delta_\theta = 2\pi(r + \delta_r)$$

d'où :

$$\delta_r = \frac{\delta_\theta}{2\pi} = \frac{pr^2}{tE}$$

Exemple 1



On demande de calculer, en négligeant l'effet de contact entre la feuille d'aluminium et la base :

- la valeur de la plus grande contrainte subie par la feuille d'aluminium;
- l'augmentation du rayon dans la zone la plus critique.

La plus grande pression s'exerce à la base de la piscine :

$$p_{max} = 14 \text{ kPa}$$

La contrainte circonférentielle la plus grande est :

$$\sigma_{\theta} = \frac{pr}{t} = \frac{14000 \times 4}{0,001} = 56 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 56 \text{ MPa}$$

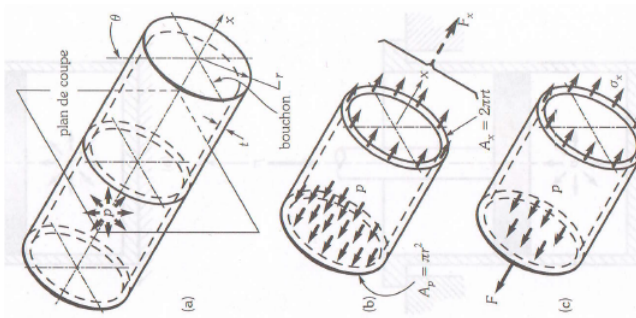
L'augmentation du rayon est donnée par :

$$\delta_r = \frac{pr^2}{tE} = \frac{14000 \times 4^2}{0,001 \times 70 \times 10^9} = 0,0032 \text{ m} \quad \text{ou} \quad 3,2 \text{ mm}$$

Remarque On n'a pas tenu compte du montage de la feuille d'aluminium ni de l'effet de toute structure de soutien.

L'augmentation du rayon sera en réalité inférieure à la valeur calculée.

Cylindre fermé



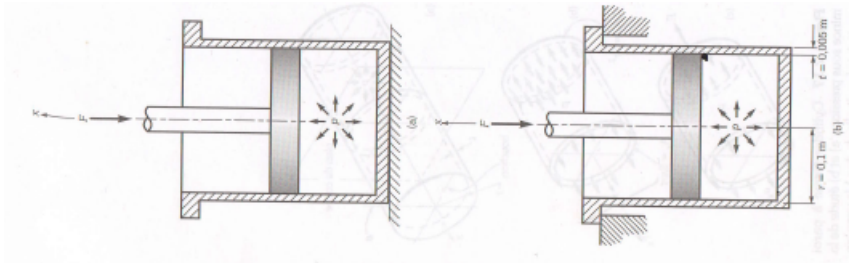
A partir des figures (b) et (c) on peut déterminer la résultante $F_x = 2\pi r t \sigma_x$.

En considérant l'équilibre de la partie coupée, on a $F_x = \pi r^2 p$
d'où: $\sigma_x = \frac{pr}{2t}$.

De même que pour le cylindre ouvert, on peut montrer que :

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{t}$$

Exemple 2



On demande d'étudier les deux conditions d'appui différentes et de calculer la valeur des contraintes dans chacun des cas ($F = 100 \text{ kN}$).

Solution

Figure (a): Aucune force longitudinale n'agit sur la paroi du cylindre reposant sur sa base. Il s'agit donc d'un cylindre **ouvert**. On détermine la pression et la contrainte circonférentielle comme suit :

$$p = \frac{F}{\text{surface du piston}} = \frac{100000}{\pi \times 0,1^2} = 3,183 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = 0$$

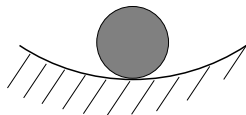
$$\sigma_\theta = \frac{pr}{t} = \frac{3,183 \times 10^6 \times 0,1}{0,005} = 63,7 \text{ MPa}$$

Figure (b): Une contrainte longitudinale se développe dans la paroi. On a donc:

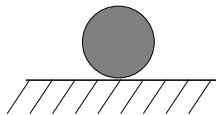
$$\sigma_x = \frac{pr}{2t} = 31,83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_\theta = 63,7 \text{ MPa}$$

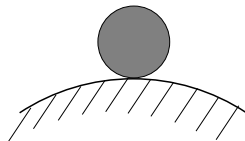
Equilibre et stabilité



Equilibre stable

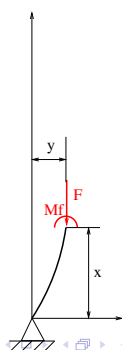
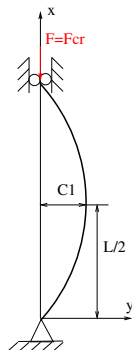
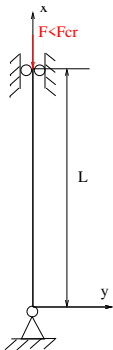


Equilibre neutre



Equilibre instable

Charge critique d'Euler F_{cr} -Poutre articulée-articulée



$$Ely'' = -M_f = -F.y \quad (1)$$

ou $Ely'' + F.y = 0$

Équation différentielle, on cherche la solution sous la forme :

$$y = C_1 \sin(\omega x + \phi)$$

on obtient : $\omega = \sqrt{\frac{F}{EI}}$

En utilisant les conditions aux limites $y(0) = y(L) = 0$, on obtient :

$$\phi = 0 \text{ et } F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (n=1,2,3, \dots)$$

D'après la forme de la poutre $n = 1$. On a donc :

$$\boxed{F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}} \quad (2)$$

F_{cr} est appelée **charge critique d'Euler**.

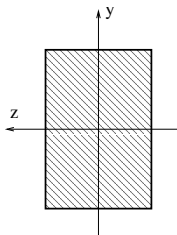
Plusieurs cas sont possibles :

- $F < F_{cr}$: compression usuelle, la poutre reste droite, elle est dite en **équilibre stable**
- $F = F_{cr}$: la poutre fléchit (ou flambe) avec une flèche égale à C_1 , elle est en **équilibre neutre**
- $F > F_{cr}$: C_1 augmente très rapidement avec un léger accroissement de F , elle est en **équilibre instable**

Remarque

Le flambement se produit suivant un axe perpendiculaire à l'axe du moment d'inertie le plus faible.

Exemple

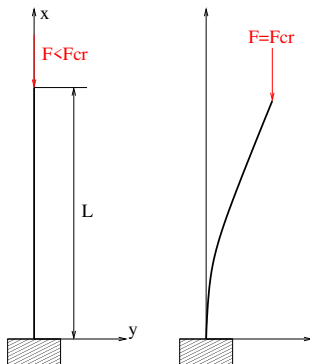


Pour cette section $I_y < I_z$, le flambement se produit suivant l'axe \bar{y} .

Principaux cas

Le flambement des poutres dépend en grande partie de la nature des liaisons ou appuis.

1. Poutre encastrée-libre

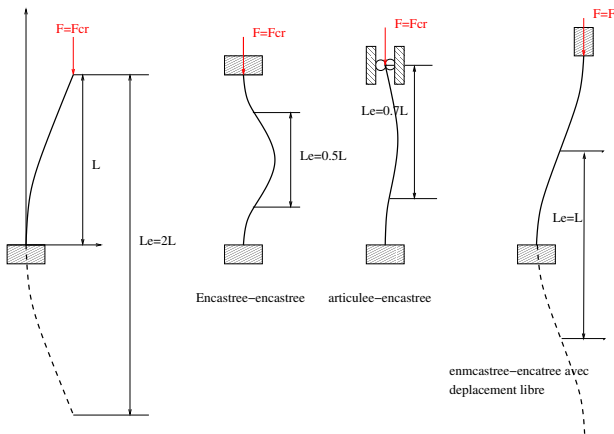


Exercice

Montrer que dans ce cas :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

2. Autres cas-Longueur effective L_e



Remarque : Les charges critiques peuvent être obtenues en remplaçant L par L_e dans la formule générale de la charge critique

d' Euler :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

On obtient :

- Pour la poutre encastrée-encastrée : $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\frac{L}{2})^2}$

- Pour la poutre encastrée-articulée : $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$

- Pour la poutre encastrée-encastrée avec déplacement libre :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Contrainte critique

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL_e^2} \quad (3)$$

Deux cas sont possibles :

- $\sigma_{cr} \leq \sigma_e \implies \sigma_{max} = \sigma_{cr}$ ruine par flambement
- $\sigma_{cr} \geq \sigma_e \implies \sigma_{max} = \sigma_e$ ruine par plasticité

Coefficient d'élanement

Le moment d'inertie de la section peut être écrit de la manière suivante : $I = Ar^2$

où r est appelé **rayon de giration** de la section.

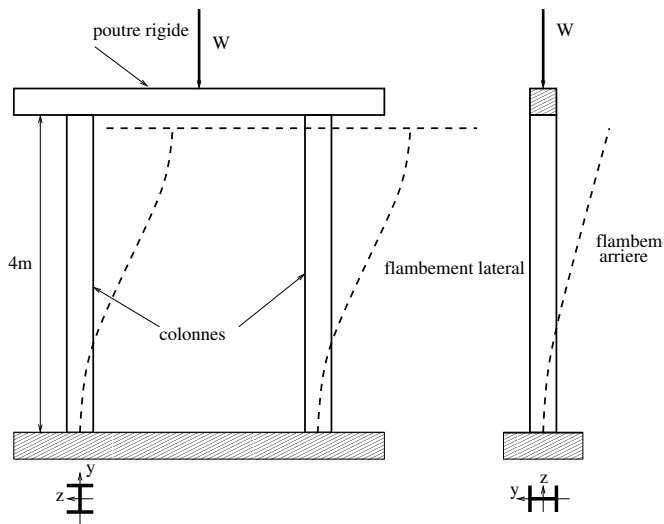
En reportant dans (104), on obtient :
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$$

$\frac{L_e}{r}$ est appelé **coefficient d'élanement** de la section.

Remarque

Plus le *coefficient d'élanement* est élevé, plus σ_{cr} est faible, et plus le risque de flambement est élevé.

Exemple



Déterminer la charge maximale que peut supporter la structure. On donne : $I_z = 9,18 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $I_y = 4,88 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $A = 2960 \text{ mm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_e = 300 \text{ MPa}$

Flambement latéral

On est dans le cas **encastrée-encastrée avec déplacement libre**

$$L_e = L = 4m.$$

Le *rayon de giration* selon y est donné par : $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 40,6 \text{ mm}$

d'où le *coefficient d'élanement*: $\frac{L_e}{r_y} = 98,5$

Flambement avant ou arrière

On est dans le cas **encastrée-libre** $L_e = 2L = 8m.$

Le *rayon de giration* selon z est donné par : $r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 55,7 \text{ mm}$

d'où le *coefficient d'élanement*: $\frac{L_e}{r_z} = 143,6$

Charge maximale

Le *coefficient d'élanement* est plus élevé dans le cas du flambement *avant ou arrière*, la contrainte critique vaut donc :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r_z}\right)^2} = 95.7 \text{ MPa} \leq \sigma_e \implies \sigma_{max} = 95.7 \text{ MPa} \quad (4)$$

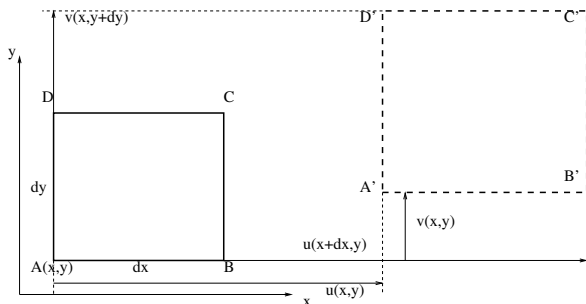
$$\implies W_{max} = 2\sigma_{max}A = 566,5 \text{ KN}$$

Tenseur des petites déformations

Pour simplifier la présentation, on se met en 2D.

Déformation longitudinale

Soit un élément infinitésimal d'un solide déformable soumis à une déformation longitudinale (changement de longueur des côtés sans changement d'angles).



La déformation longitudinale suivant x est définie par :

$$\epsilon_{xx} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{dx + u(x + dx, y) - u(x, y) - dx}{dx}$$

On peut écrire :

$$u(x + dx, y) \simeq u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

On obtient finalement :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

En raisonnant de la même façon sur AD et A'D', on peut montrer que

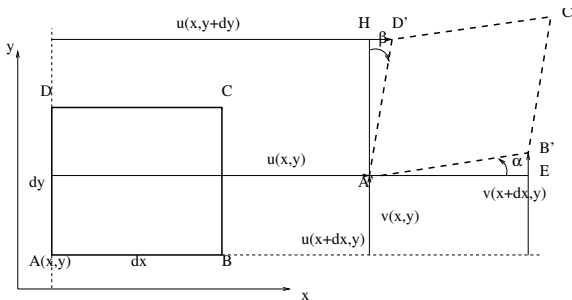
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6)$$

Convention de signe

Les déformations longitudinales sont positives en cas d'allongement et négatives en cas de rétrécissement.

Déformation angulaire ou distorsion

Soit un élément infinitésimal d'un solide déformable soumis à une déformation angulaire (changement des angles sans changement de longueur).



Considérons le triangle rectangle $A'B'E$, puisque α est petit (petites déformations), on a :

$$\sin \alpha \simeq \alpha = \frac{B'E}{A'B'} = \frac{B'E}{AB} = \frac{v(x+dx, y) - v(x, y)}{dx}$$

$$v(x+dx, y) \simeq v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

Finalement, on obtient :

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

De la même manière, en raisonnant sur le triangle A'D'H, on peut montrer que :

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

La déformation angulaire, ou distorsion, est définie comme l'écart par rapport à $\frac{\pi}{2}$ de l'angle $\widehat{B'A'D'}$:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Pour la composante ε_{xy} du tenseur de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}$, elle est définie par :

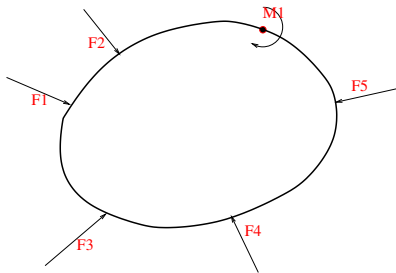
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Convention de signe

La déformation angulaire est positive lorsque l'angle droit \widehat{BAD} diminue, et négative lorsqu'il augmente.

Principe de conservation de l'énergie- Premier principe de la thermodynamique

Soit un solide déformable soumis à des efforts extérieurs.



$$\Delta Q + \Delta W_e = \Delta K + \Delta U \quad (7)$$

Q : Quantité de chaleur fournie par l'extérieur

W_e : Travail des forces (ou couples) extérieurs

K : Energie cinétique

U : Energie interne (Energie de déformation élastique dans ce cas)

Hypothèses

- 1 Les sollicitations extérieures sont appliquées progressivement et lentement $\implies \Delta K = 0$
- 2 Les frottements dans les appuis sont négligeables et le corps est parfaitement élastique $\implies \Delta Q = 0$

L'équation (7) devient:

$$\Delta W_e = \Delta U \quad (8)$$

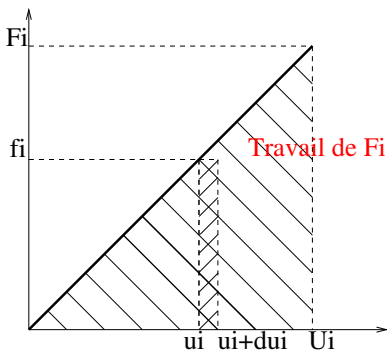
Travail des forces extérieures = Énergie de déformation élastique

Expression du travail des forces extérieures

Théorème de Clapeyron

Soit U_i le déplacement du point d'application de F_i et dans sa direction. A cause du comportement élastique linéaire, les forces F_i sont des fonctions linéaires des déplacements U_i :

$$F_i = \lambda U_i \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$



$$W_e(F_i) = \int_0^{U_i} f_i du_i = \int_0^{U_i} \lambda u_i du_i = \lambda \frac{U_i^2}{2} = \frac{1}{2} \lambda U_i U_i = \frac{1}{2} F_i U_i$$

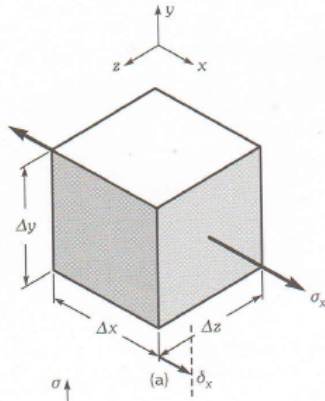
En considérant tous les efforts extérieurs, on obtient le **Théorème de Clapeyron**:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum (F_i U_i + M_i \theta_i) \quad (9)$$

Remarque

Dans (9), U_i représente le déplacement dans la direction de F_i et θ_i la rotation autour de l'axe de M_i

Énergie associée à une contrainte normale



Appliquons sur les faces normales à x des forces de traction variant progressivement de 0 à $P = \sigma_x \Delta y \Delta z$. L'élément de volume s'allonge progressivement de 0 à δ_x .

Le travail extérieur W effectué par cette charge est emmagasiné sous forme d'énergie de déformation ΔU .

$$\begin{aligned} W = \Delta U &= \frac{1}{2} P \delta_x, \text{ sachant que } \varepsilon_x = \frac{\delta_x}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_x \Delta y \Delta z \varepsilon_x \Delta x = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \Delta V \end{aligned}$$

La densité d'énergie de déformation $U_{0\sigma}$ est définie par:

$$U_{0\sigma} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x = \frac{E \varepsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2E}. \quad (10)$$

Énergie associée à un état général de contrainte

Par analogie avec (10), la densité d'énergie de déformation U_0 est donnée par:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{zy} \gamma_{zy})$$

En utilisant la loi de Hooke, U_0 s'exprime en fonction des contraintes comme suit:

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) \\ + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{xz}^2)$$

L'énergie totale de déformation U emmagasinée dans un volume V du matériau est donnée par:

$$U = \int_V U_0 dV$$

Énergie de déformation d'une poutre

Cas de la traction-compression

Soit une poutre de section droite A et de longueur L , soumise à une effort normal N . La densité d'énergie s'exprime dans ce cas comme suit :

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{N^2}{A^2 2E}$$

L'énergie de déformation de la poutre est donnée par :

$$U = \int_V U_0 dV = \int_L \frac{N^2}{A^2 2E} A dx = \frac{1}{2} \int_L \frac{N^2}{AE} dx.$$

Cas de la flexion

Soit une poutre de longueur L et de moment d'inertie de la section I , soumise à des charges transversales engendrant une flexion. Dans la plupart des cas, l'énergie liée aux contraintes de cisaillement est négligeable, comparativement à l'énergie associée à la contrainte normale. Par conséquent, on a :

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{M_f^2 y^2}{2EI^2}$$

U est donnée par :

$$\begin{aligned}U &= \int_V U_0 dV = \int_0^L \int_A \frac{M_f^2 y^2}{2EI^2} dA dx = \int_0^L \left(\frac{M_f^2}{2EI^2} \int_A y^2 dA \right) dx \\ &= \int_L \frac{M_f^2}{2EI} dx,\end{aligned}$$

où on a utilisé la définition du moment d'inertie :

$$I = \int_A y^2 dA$$

Cas de la torsion

De la même manière que pour la flexion, on peut montrer que pour une poutre de longueur L et de moment polaire de la section J, soumise à un moment de torsion M_t , l'énergie s'exprime ainsi :

$$U = \int_L \frac{M_t^2}{2GJ} dx$$

Cas général

Dans le cas d'une poutre soumise à un effort normal N , à un moment fléchissant M_f , et à un moment de torsion M_t , U est donnée par:

$$U = \frac{1}{2} \int_L \left(\frac{N^2}{AE} + \frac{M_t^2}{GJ} + \frac{M_f^2}{IE} \right) dx. \quad (11)$$

Exemple 1

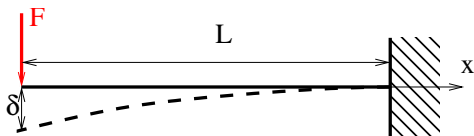


Figure 1:

Soit une poutre de section constante A et de module de Young E sollicitée selon la figure 1. Calculer l'énergie de déformation et le déplacement vertical du point d'application de la charge F .

Solution

Détermination du moment fléchissant :

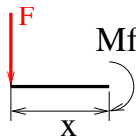


Figure 2:

$$M_f = Fx$$

$$U = \int_0^L \frac{M_f^2}{2EI} dx = \frac{F^2}{2EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{F^2 L^3}{6EI}$$

$$U = W = \frac{1}{2} F \delta \implies \delta = \frac{FL^3}{3EI}$$

Exemple 2

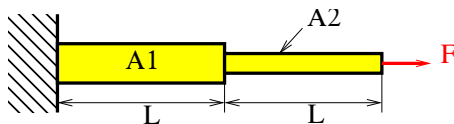


Figure 3:

Soit une poutre de module de Young E sollicitée selon la figure 3. Calculer l'énergie de déformation et le déplacement horizontal δ du point d'application de la charge F .

Solution

$$N = F$$
$$U = \int_0^L \frac{F^2}{2EA_1} dx + \int_L^{2L} \frac{F^2}{2EA_2} dx = \frac{F^2 L}{2E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)$$
$$U = W = \frac{1}{2} F \delta \implies \delta = \frac{FL}{E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)$$

Exemple 3

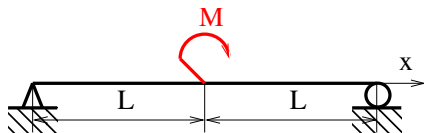


Figure 4:

Soit une poutre de module de Young E et de moment d'inertie I sollicitée selon la figure 4. Calculer l'énergie de déformation et la rotation θ du point d'application du moment M .

Solution

$$M_f = \begin{cases} -\frac{M}{2L}x, & 0 \leq x < L \\ \frac{M}{2L}(2L - x), & L < x \leq 2L \end{cases}$$

$$U = \int_0^L \frac{\left(-\frac{M}{2L}x\right)^2}{2EI} dx + \int_L^{2L} \frac{\left(\frac{M}{2L}(2L - x)\right)^2}{2EI} dx = \frac{M^2 L}{12EI}$$

$$U = W = \frac{1}{2} M\theta \implies \theta = \frac{ML}{6EI}$$

Exemple 4

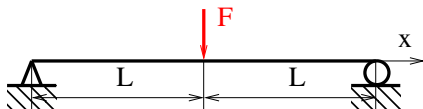


Figure 5:

Soit une poutre de module de Young E et de moment d'inertie I sollicitée selon la figure 5. Calculer l'énergie de déformation et la flèche δ au point d'application de la force F .

Solution

A cause de la symétrie du problème, on ne considère que la moitié de la poutre :

$$M_f = \frac{F}{2}x, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$U = 2 \int_0^L \frac{\left(\frac{F}{2}x\right)^2}{2EI} dx = \frac{F^2 L^3}{12EI}$$

$$U = W = \frac{1}{2} F \delta \implies \delta = \frac{FL^3}{6EI}$$

Exercice à faire

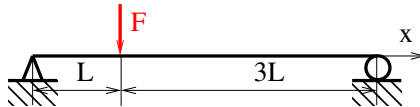


Figure 6:

Soit une poutre de module de Young E et de moment d'inertie I sollicitée selon la figure 6. Calculer l'énergie de déformation et la flèche δ au point d'application de la force F .

Remarque

Le théorème de Clapeyron ne permet de déterminer le déplacement que dans le cas d'un chargement ponctuel unique. Pour plusieurs chargements ponctuels, on utilise le **Théorème de Castigliano**.

Enoncé

- La dérivée de l'énergie de déformation d'un corps, par rapport à toute force (ponctuelle) P , est égale à la flèche δ au point d'application de cette force, dans la direction de la force.

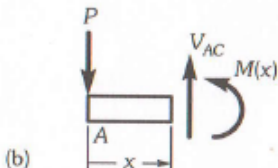
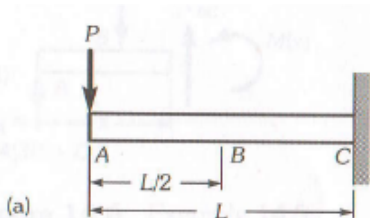
$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta$$

- La dérivée de l'énergie de déformation d'un corps, par rapport à tout moment M , est égale à l'angle de rotation θ autour de l'axe du moment, au point d'application du moment.

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \theta$$

Exemple

Soit une poutre en porte-à-faux soumise à une charge à son extrémité libre A (Fig (a)). On demande de calculer : la flèche à l'extrémité A, la flèche au point milieu B et la rotation en A.



Solution

1. Flèche en A

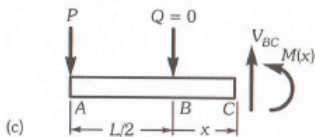
Selon la Figure (b) : $M(x) = -Px \quad 0 \leq x \leq L$

L'énergie de déformation est donnée par : $U = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$

La flèche en A est donnée par : $\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI}$

2. Flèche en B

En B, il n'y a aucune charge concentrée. Pour pouvoir utiliser le théorème de Castigliano, il va falloir appliquer en B une force *fictive* Q (Figure c). Lorsqu'on aura obtenu la solution, on posera $Q = 0$.



Selon la Figure (c):

$$M(x) = \begin{cases} -Px & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ -P\left(\frac{L}{2} + x\right) - Qx & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$

L'énergie de déformation est donnée par :

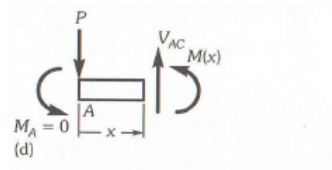
$$\begin{aligned} U &= \int_0^{L/2} \frac{(-Px)^2}{2EI} dx + \int_0^{L/2} \frac{(-P(L/2 + x) - Qx)^2}{2EI} dx \\ &= \frac{P^2 L^3}{6EI} - \frac{L^3}{6(P+Q)EI} (-(P+Q/2)^3 + P^3/8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{L^3}{6EI(P+Q)} \left[\frac{-(P+Q/2)^3 + P^3/8}{P+Q} + \frac{3}{2}(P+Q/2)^2 \right] \quad (12)$$

En posant $Q = 0$ dans (12), on obtient la flèche en B : $\delta_B = \frac{5PL^3}{48EI}$

3. Rotation en A

Encore une fois, puisqu'il n'y a aucun moment en A, il convient d'appliquer en A un moment fictif M_A .



D'après la Figure (d), on a : $M(x) = -Px - M_A \quad 0 \leq x \leq L$

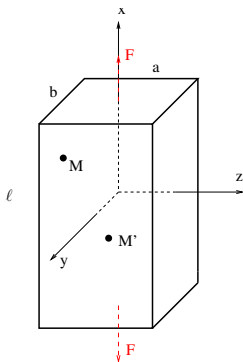
L'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \int_0^L \frac{(-Px - M_A)^2}{2EI} dx = \frac{1}{6EIP} [(PL + M_A)^3 - M_A^3]$$
$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{1}{2EIP} [(PL + M_A)^2 - M_A^2] \quad (13)$$

En posant $M_A = 0$ dans (13), on obtient la rotation en A :

$$\theta_A = \frac{PL^2}{2EI}$$

Expérience fondamentale



Eprouvette constituée d'un matériau :

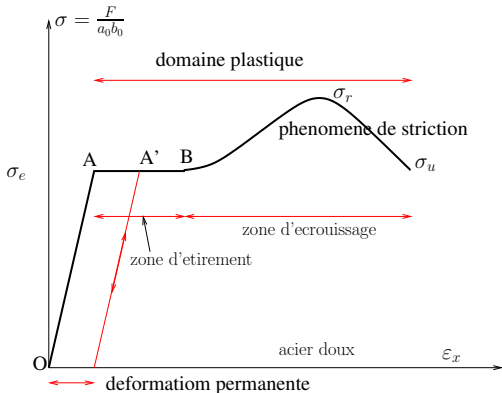
- homogène : mêmes propriétés en M et M'
- isotrope : mêmes propriétés dans toutes les directions

de forme telle que :

- les forces de volumes sont négligeables
- l'état de contrainte est homogène ($\underline{\underline{\sigma}}_M = \underline{\underline{\sigma}}_{M'}$).
D'après les conditions aux limites, on a :

$$\sigma_x = \frac{F}{ab}, \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

- l'état de déformation est homogène ($\underline{\underline{\varepsilon}}_M = \underline{\underline{\varepsilon}}_{M'}$)



OA : zone dans laquelle les déformations sont instantanées et réversibles. **C'est la zone élastique.** Dans cette zone:

$$\frac{\Delta l}{l} = \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \text{ élasticité linéaire, } E : \text{ module de Young}$$

Remarques

- La loi de Hooke $\sigma_x = E\varepsilon_x$ est valable également dans le domaine élastique linéaire pour des essais de compression.
- Au cours de l'expérience, les dimensions transversales a et b subissent des variations relatives **proportionnelles à ε_x** :

$$\frac{a - a_0}{a_0} = \frac{b - b_0}{b_0} = -\nu \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = -\nu \varepsilon_x, \nu \text{ coefficient de Poisson}$$

- Il ne se produit **aucune distorsion des angles formés par les arêtes du solide**.

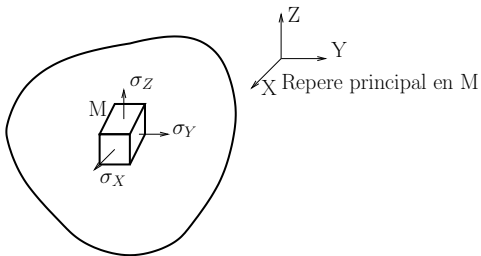
Conclusion

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}]_{xyz} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_x \end{pmatrix}, [\underline{\underline{\sigma}}]_{xyz} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Oxyz : repère principal des déformations et des contraintes.

Loi générale de Hooke

Elle postule dans le cas 3D une relation linéaire entre les contraintes et les déformations. Elle permet donc de **superposer** les différents états de contrainte et de déformation.



déformations			dûes à
ϵ_X	ϵ_Y	ϵ_Z	
$\frac{\sigma_X}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_X}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_X}{E}$	σ_X
$-\nu \frac{\sigma_Y}{E}$	$\frac{\sigma_Y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_Y}{E}$	σ_Y
$-\nu \frac{\sigma_Z}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_Z}{E}$	$\frac{\sigma_Z}{E}$	σ_Z

En superposant les trois états de contraintes et de déformations, on obtient l'état de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ correspondant à l'état de

contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ (matrice dans XYZ : $[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_X & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z \end{pmatrix}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_X = \frac{1}{E}(\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)) = \frac{1}{E}((1 + \nu)\sigma_X - \nu.l_1) \\ \varepsilon_Y = \frac{1}{E}(\sigma_Y - \nu(\sigma_X + \sigma_Z)) = \frac{1}{E}((1 + \nu)\sigma_Y - \nu.l_1) \\ \varepsilon_Z = \frac{1}{E}(\sigma_Z - \nu(\sigma_Y + \sigma_X)) = \frac{1}{E}((1 + \nu)\sigma_Z - \nu.l_1) \\ \text{avec } l_1 = \text{tr}\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z \\ \varepsilon_{XY} = \varepsilon_{XZ} = \varepsilon_{YZ} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

La relation (14) équivaut à la relation tensorielle :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} l_1 \cdot \underline{\underline{1}} \quad (15)$$

Remarque

La relation (15) a été démontrée dans un repère principal, on peut montrer qu'elle est valable dans n'importe quel repère

Inversion de (15) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (16)$$

λ et μ sont appelés **coefficients de Lamé**. Ils sont liés à E et ν par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{cases}$$

λ et μ sont homogènes à une contrainte.

Exemple 1

On donne l'état de contrainte suivant :

$$\sigma_{xx} = 100 \text{ MPa}, \sigma_{yy} = 50 \text{ MPa}, \sigma_{zz} = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy} = 60 \text{ MPa}, \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

$$E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3.$$

Calculer les déformations.

Solution

On utilise la relation (15) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} &= \frac{1.3}{200 \times 10^9} \begin{pmatrix} 100 & 60 & 0 \\ 60 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \times 10^6 - \frac{0.3}{200 \times 10^9} \times 170 \times 10^6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3.95 \times 10^{-4} & 3.9 \times 10^{-4} & 0 \\ 3.9 \times 10^{-4} & 7 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -1.25 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 2

On donne l'état de déformation suivant :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.95 \times 10^{-4} & 3.9 \times 10^{-4} & 0 \\ 3.9 \times 10^{-4} & 7 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -1.25 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3.$$

Calculer les contraintes.

Solution

On utilise la relation (16). On doit d'abord calculer les coefficients de Lamé :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{200 \times 0.3}{1.3 \times 0.4} = 115.38 \text{ GPa} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0.3)} = 76.92 \text{ GPa} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 115.38 \times 10^9 \times 9.7 \times 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ + 2 \times 76.92 \times 10^9 \begin{pmatrix} 3.95 & 3.9 & 0 \\ 3.9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1.25 \end{pmatrix} 10^{-4} = \begin{pmatrix} 100 & 60 & 0 \\ 60 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Soient deux vecteurs \vec{A} de composantes $(A_i, i = 1, 2, 3)$, et \vec{C} de composantes $(C_i, i = 1, 2, 3)$, et un tenseur $\underline{\underline{B}}$ de composantes $(B_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$ reliés par la relation suivante :

$$\vec{A} = \underline{\underline{B}} \cdot \vec{C} \quad (17)$$

La relation tensorielle (17) peut être écrite à l'aide des composantes de la manière suivante :

$$\begin{cases} A_1 = B_{11} C_1 + B_{12} C_2 + B_{13} C_3 \\ A_2 = B_{21} C_1 + B_{22} C_2 + B_{23} C_3 \\ A_3 = B_{31} C_1 + B_{32} C_2 + B_{33} C_3 \end{cases} \quad (18)$$

L'écriture des équations (18) étant trop lourde, elle peut être simplifiée de la manière suivante :

$$A_i = \sum_{j=1}^3 B_{ij} C_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

Dans (19), i est appelé indice libre, et j indice muet.

Remarques

- L'indice libre est ainsi appelé car il peut être changé par tout autre indice :

$$A_i = \sum_{j=1}^3 B_{ij} C_j = \sum_{k=1}^3 B_{ik} C_k$$

- L'indice libre doit être le même dans les deux membres de l'équation.

$$A_k = \sum_{j=1}^3 B_{kj} C_j, \quad k = 1, 2, 3$$

$$A_k \neq \sum_{j=1}^3 B_{ij} C_j, \quad i = 1, 2, 3$$

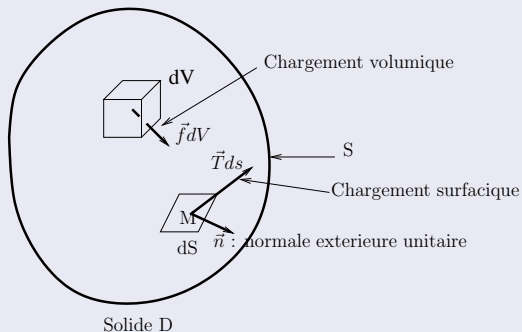
Convention de l'indice muet

Chaque fois qu'un indice se répète deux fois dans un terme, cela veut dire qu'on doit effectuer la sommation sur toutes les valeurs de l'indice.

Avec cette convention, (19) devient :

$$A_i = B_{ij}C_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Chargement extérieur appliqué à un solide



Les chargements extérieurs appliqués à un solide sont de deux types:

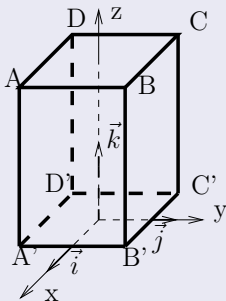
- Chargement volumique \vec{f} (N/m^3) à l'intérieur du solide.
- Des chargements surfaciques \vec{T} (N/m^2) sur la surface extérieure S du solide.

Théorème de Cauchy

La relation entre le vecteur contraire \vec{T} sur dS et le tenseur contrainte en M est donnée par :

$$\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}}(M) \cdot \vec{n}$$

Exemple



Dans le solide non pesant $ABCDA'B'C'D'$ l'état de contrainte est homogène ($\underline{\underline{\sigma}}(M) = \underline{\underline{\sigma}}, \forall M$). Ce solide est soumis aux chargements

- sur ABCD : vecteur contrainte de module p , direction et sens \vec{k} .
- sur A'B'C'D' : vecteur contrainte de module p , direction et sens $-\vec{k}$.
- sur BCC'B' : vecteur contrainte de module q , direction et sens \vec{j} .
- sur ADD'A' : vecteur contrainte de module q , direction et sens $-\vec{j}$.
- sur ABA'B' : vecteur contrainte de module 0.
- sur DCC'D' : vecteur contrainte de module 0.

Déterminer les composantes du tenseur contrainte dans le solide.

Solution

- sur ABCD : $\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}$$

- sur A'B'C'D' : $\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{pmatrix}$$

- sur BCC'B' : $\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$$

- sur ADD'A' : $\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix}$$

- sur ABA'B' : $\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- sur DCC'D' : $\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement la matrice de σ dans (x,y,z) est donnée par :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Équations de compatibilité

Pour qu'un champ de tenseurs de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(x, y, z)$ dérive d'un champ de vecteurs déplacement $\vec{u}(x, y, z)$, il faut et il suffit qu'il soit **compatible**. C'est à dire qu'il vérifie les six équations de compatibilité suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{x,yz} = (-\varepsilon_{yz,x} + \varepsilon_{xz,y} + \varepsilon_{xy,z})_{,x} \\ \varepsilon_{y,zx} = (-\varepsilon_{zx,y} + \varepsilon_{yx,z} + \varepsilon_{yz,x})_{,y} \\ \varepsilon_{z,xy} = (-\varepsilon_{xy,z} + \varepsilon_{zy,x} + \varepsilon_{zx,y})_{,z} \\ \varepsilon_{z,y^2} + \varepsilon_{y,z^2} = 2\varepsilon_{yz,yz} \\ \varepsilon_{x,z^2} + \varepsilon_{z,x^2} = 2\varepsilon_{zx,zx} \\ \varepsilon_{y,x^2} + \varepsilon_{x,y^2} = 2\varepsilon_{xy,xy} \end{cases}$$

Pour un état de déformation plane :

$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y)$, $\varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y)$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}(x, y)$ et les autres composantes nulles, les six équations se réduisent à une seule :

$$\varepsilon_{y,x^2} + \varepsilon_{x,y^2} = 2\varepsilon_{xy,xy} \quad (20)$$

Exemple 1

Soit le champ de déformation plane suivant :

$$\varepsilon_x = ax + by, \varepsilon_y = cxy, \varepsilon_{xy} = dx^2 + ey^2$$

- 1 Est-il compatible ?
- 2 Déterminer le champ $\vec{u}(x, y)$ correspondant.

Solution

- 1 Le champ est compatible s'il vérifie l'équation (20) :

$$\varepsilon_{y,x^2} = 0, \varepsilon_{x,y^2} = 0, \varepsilon_{xy,xy} = 0 \text{ donc (20) est vérifiée}$$

- 2 $\varepsilon_x = u_{x,x} \Rightarrow u_x = \int \varepsilon_x dx = \frac{1}{2}ax^2 + byx + C(y)$

$$\varepsilon_y = u_{y,y} \Rightarrow u_y = \int \varepsilon_y dy = \frac{1}{2}cxy^2 + D(x)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) = \frac{1}{2}(bx + C'(y) + \frac{1}{2}cy^2 + D'(x)) = dx^2 + ey^2$$

$$bx + D'(x) - 2dx^2 = 2ey^2 - \frac{1}{2}cy^2 - C'(y) = E$$

$$D'(x) = E - bx + 2dx^2 \Rightarrow D(x) = Ex - \frac{1}{2}bx^2 + \frac{2}{3}dx^3 + F$$

$$C'(y) = \left(2e - \frac{c}{2}\right)y^2 - E \Rightarrow C(y) = \frac{(2e - \frac{c}{2})}{3}y^3 - Ey + G$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{2}ax^2 + byx + \frac{(2e - \frac{c}{2})}{3}y^3 - Ey + G \\ u_y = \frac{1}{2}cxy^2 + Ex - \frac{1}{2}bx^2 + \frac{2}{3}dx^3 + F \end{cases}$$

Remarque : Le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ a pu être intégré car compatible.

Exemple 2

Soit le champ de déformation plane suivant :

$$\varepsilon_x = ay^3, \varepsilon_y = bx, \varepsilon_{xy} = c, \text{ avec } a \neq 0$$

- 1 Est-il compatible ?
- 2 Déterminer le champ $\vec{u}(x, y)$ correspondant.

Solution

- 1 Le champ est compatible s'il vérifie l'équation (20) :

$$\varepsilon_{y,x^2} = 0, \varepsilon_{x,y^2} = 6ay, \varepsilon_{xy,xy} = 0 \text{ donc (20) est non vérifiée}$$

- 2 $\varepsilon_x = u_{x,x} \Rightarrow u_x = \int \varepsilon_x dx = axy^3 + C(y)$

$$\varepsilon_y = u_{y,y} \Rightarrow u_y = \int \varepsilon_y dy = bxy + D(x)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) = \frac{1}{2}(3axy^2 + C'(y) + by + D'(x)) = c \quad (21)$$

L'équation (21) est impossible à intégrer à cause de la présence du terme $3axy^2$. Donc le champ de déplacement correspondant n'existe pas.

Remarque : Le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ n'a pas pu être intégré car incompatible.

Problème d'équilibre élastique isotherme

On considère un solide en **équilibre**.

On impose progressivement certaines forces surfaciques sur la frontière et certaines forces volumiques. Sous ces sollicitations le solide atteint un nouvel état d'équilibre : **état d'équilibre élastique**.

Problème : On cherche les déplacements par rapport à l'état initial ainsi que les contraintes dans le solide.

On effectue des hypothèses permettant la linéarisation du problème:

- Hypothèse de la transformation infinitésimale (Hypothèse des petites déformations).
- Hypothèse des petits déplacements : on confond la géométrie actuelle du solide avec sa géométrie initiale.

Ces deux hypothèses sont appelées **Hypothèse des petites perturbations H.P.P.**

Les équations de l'équilibre élastique sont alors les suivantes:

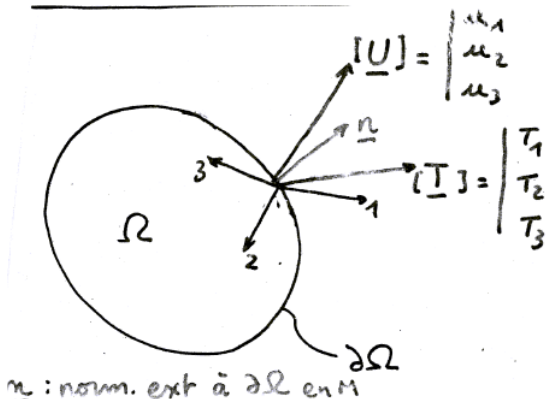
- Équations de l'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad f_i \text{ composantes des forces volumiques}$$

- Loi de comportement : $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$

- Conditions aux limites

Conditions aux limites (CL)

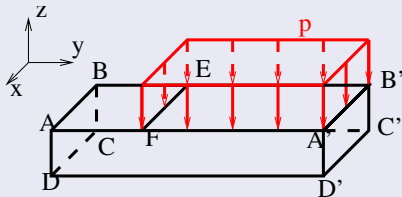


Classiquement, elles consistent en la donnée, en chaque point M du contour $\partial\Omega$ du solide, de 3 composantes, **orthogonales entre elles**, pour l'ensemble des deux vecteurs contrainte \underline{T} et déplacement \underline{U} en M.

$$i = 1, 2, 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} T_i = \sigma_{ij} n_j = T_i^d \quad \text{sur } S_{T_i} \\ U_i = U_i^d \quad \text{sur } S_{U_i} \\ S_{U_i} \cup S_{T_i} = \partial\Omega; \quad S_{U_i} \cap S_{T_i} = \emptyset \end{array} \right.$$

Avec ce type de CL, on peut démontrer l'**existence** et l'**unicité** de la solution du problème d'équilibre élastique.

Exemple 1

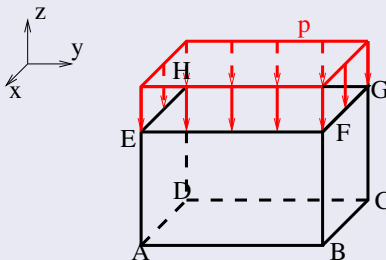


Soit le solide encasté sur $ABCD$ et chargée uniformément sur $EFA'B'$. Écrire les conditions aux limites.

Solution

- Sur ABCD : $u_x = u_y = u_z = 0$
- Sur ABEF : $T_x = T_y = T_z = 0$
- Sur EFA'B' : $T_x = T_y = 0, T_z = -p$
- Sur BCB'C' : $T_x = T_y = T_z = 0$
- Sur A'B'C'D' : $T_x = T_y = T_z = 0$
- Sur ADD'A' : $T_x = T_y = T_z = 0$
- Sur CDD'C' : $T_x = T_y = T_z = 0$

Exemple 2



La surface ABCD repose sans frottement sur le sol indéformable. La surface EFGH est chargée uniformément. Écrire les conditions aux limites.

Solution

- Sur ABCD : $T_x = T_y = u_z = 0$
- Sur ABEF : $T_x = T_y = T_z = 0$
- Sur EFGH: $T_x = T_y = 0, T_z = -p$
- Sur BCGF : $T_x = T_y = T_z = 0$
- Sur CGHD : $T_x = T_y = T_z = 0$
- Sur HEDA : $T_x = T_y = T_z = 0$

Résolution du problème d'équilibre élastique isotherme

$$S \quad \begin{cases} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 & i = 1, 2, 3 & (1) \\ \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} & (2) \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & (3) \\ C.L. & (4) \end{cases}$$

En portant (3) dans (2), le système précédent est constitué de **9 champs scalaire inconnus** $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$; $u_i(x_1, x_2, x_3)$ et de **9 équations de champs**, plus les C.L. imposées sur $\partial\Omega$.

Compte tenu de l'unicité de la solution, on peut faire des hypothèses sur la forme des champs solutions qui seront justifiées *a posteriori*, une fois la solution obtenue. Il existe deux méthodes de résolution:

- Méthode des déplacements
- Méthode des forces

Méthode des déplacements

\underline{u} est pris comme inconnue principale de (S)

On postule un champ \underline{u} satisfaisant les C.L. en déplacement (\underline{u} est dit cinématiquement admissible C.A.) et l'équation de Navier obtenue en exprimant (1) en fonction de \underline{u} (grâce à (3) et (2)). Ainsi le champ $\underline{\sigma}$ calculé à partir de (2) vérifie (1). Si $\underline{\sigma}$ satisfait de plus les C.L. en contrainte, $(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}(\underline{u}))$ est la solution du problème.

Équation de Navier

En coordonnées cartésiennes orthonormées, l'équation de Navier s'écrit:

$$(\lambda + \mu)u_{j,jj} + \mu\Delta u_i + F_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

avec F_j : forces volumiques.

Méthode des forces

$\underline{\underline{\sigma}}$ est pris comme inconnue principale de (S)

On choisit $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfaisant les équations de l'équilibre, les conditions aux limites en contraintes ($\underline{\underline{\sigma}}$ est statiquement admissible) et l'équation de Beltrami, obtenue en portant la loi de comportement:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{I}}$$

dans les équations de compatibilité. Ainsi, le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est intégrable.

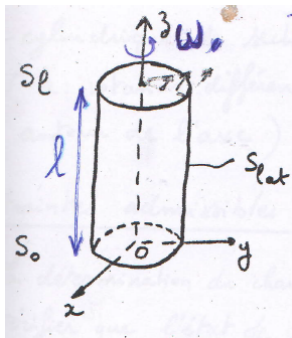
Si le champ $\underline{\underline{u}}$, obtenu par intégration de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, vérifie les C.L. en déplacement, $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{u}})$ est la solution du problème.

Équations de Beltrami

Dans le cas où le champ de forces volumiques est uniforme (exemple : gravité dans un milieu homogène), les équations de Beltrami s'écrivent en coordonnées cartésiennes orthonormées:

$$(1 + \nu) \Delta \sigma_{ij} + \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}_{,ij} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

Exemple : Torsion élastique d'un cylindre



Conditions aux limites :

$$\begin{cases} S_0 : & u_x = u_y = u_z = 0 \\ S_l : & u_x = -\omega y, u_y = \omega x, u_z = 0 \\ S_{lat} : & T_x = T_y = T_z = 0 \end{cases}$$

Forces volumiques $\underline{F} = 0$

Résolution par la méthode des déplacements

- Posons :

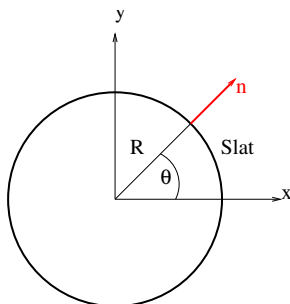
$$u_x = -\omega y \frac{z}{\ell}, \quad u_y = \omega x \frac{z}{\ell}, \quad u_z = 0 \quad \underline{u} \text{ est C.A.}$$

- On vérifie l'équation de Navier.
- On calcule les déformations ensuite les contraintes :

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}\omega \frac{y}{\ell} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\omega \frac{x}{\ell} \\ -\frac{1}{2}\omega \frac{y}{\ell} & \frac{1}{2}\omega \frac{x}{\ell} & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\underline{\sigma}] = \lambda(\text{tr}\underline{\varepsilon})[\underline{I}] + 2\mu[\underline{\varepsilon}] = \mu \frac{\omega}{\ell} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

- On vérifie que $\underline{\sigma}$ satisfait les conditions aux limites en contrainte.



$$[T] = [\underline{\underline{\sigma}}] \cdot [\underline{n}] = \mu \frac{\omega}{\ell} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -R \sin \theta \\ 0 & 0 & R \cos \theta \\ -R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion

$(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{u})$ est la solution recherchée.

Contraintes admissibles

La détermination du champ de contraintes dans le solide permet de vérifier que l'état de contrainte reste partout inférieur à un seuil admissible fixé. Le critère s'écrit:

$$\sigma_e \leq \sigma_a \quad \sigma_e : \text{contrainte équivalente}, \quad \sigma_a : \text{contrainte admissible}$$

Critère de Von Mises

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} \underline{\underline{s}}^2}, \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}}{3} \underline{\underline{I}} : \text{tenseur déviateur des contraintes}$$

Exemple d'application

Calculer pour le cylindre en torsion, la rotation maximale ω_{max} admissible.

Solution

$$[\underline{s}] = \mu \frac{\omega}{\ell} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$tr \underline{s}^2 = 2 \left(\frac{\mu \omega}{\ell} \right)^2 (x^2 + y^2)$$

on prend le maximum : $x^2 + y^2 = R^2$

le critère de Von Mises donne :

$$\sqrt{3} \frac{\mu \omega}{\ell} R \leq \sigma_a \Rightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{\ell \sigma_a}{R \mu} = \omega_{max}$$

Étude d'un massif en compression : Un massif parallélépipédique non pesant (Figure 7) a un comportement élastique linéaire déterminé par les coefficients de Lamé λ et μ . Il est soumis aux conditions aux limites suivantes:

- La face supérieure ($x_1 = h$) du massif est soumise à une pression uniforme p .
- La face inférieure ($x_1 = 0$) repose sur un appui plan indéformable, le contact étant sans frottement.
- Les faces perpendiculaires à x_3 s'appuient sans frottement sur un appui plan indéformable.
- Les faces perpendiculaires à x_2 sont libres.

On demande :

- 1 Écrire les conditions aux limites.
- 2 Déterminer les champs de contraintes et de déplacement dans le massif en utilisant la *méthode des déplacements*, en postulant un champ de déplacement de la forme suivante :

$$u_1 = Ax_1 + Bx_2 + E, \quad u_2 = Cx_1 + Dx_2 + F, \quad u_3 = 0 \quad (22)$$

A, B, C, D sont des constantes à déterminer.

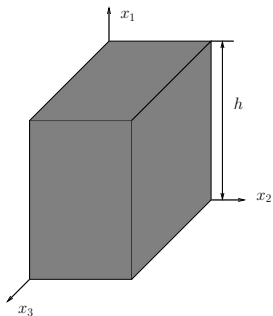


Figure 7:

Solution

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- Sur la face supérieure:

$$T_1 = -p, \quad T_2 = T_3 = 0$$

- Sur la face inférieure:

$$u_1 = 0, \quad T_2 = T_3 = 0$$

- Sur les faces perpendiculaires à x_2 :

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0$$

- Sur les faces perpendiculaires à x_3 :

$$T_1 = T_2 = 0, \quad u_3 = 0$$

La procédure de résolution est la suivante:

- Le champ (22) doit être cinématiquement admissible. C'est à dire qu'il doit vérifier les conditions aux limites en déplacement:

- Sur la face inférieure ($x_1 = 0$): $u_1 = 0$. En remplaçant dans (22), il vient:

$$u_1 = A \times 0 + Bx_2 + E = 0, \quad \forall x_2 \Rightarrow B = E = 0$$

- Sur les faces perpendiculaires à x_3 : $u_3 = 0$, cette condition est vérifiée par (22).
 - Le champ (22) est cinématiquement admissible.
- Le champ (22) doit vérifier les équations de Navier qui s'écrivent (sans forces volumiques):

$$(\lambda + \mu)u_{j,j} + \mu\Delta u_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (23)$$

On observe que les équations (23) contiennent des dérivées d'ordre 2. Le champ de déplacement (22) est linéaire, ces dérivées sont donc nulles et les équations de Navier sont automatiquement vérifiées.

- Calculer le champ de contrainte. Pour déterminer ce champ on doit d'abord:
 - déterminer le champ de déformation:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}C & 0 \\ \frac{1}{2}C & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ensuite calculer $\underline{\underline{\sigma}}$ en utilisant la loi de comportement:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \lambda(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} \\ &= \begin{pmatrix} ((\lambda + 2\mu)A + \lambda D) & \mu C & 0 \\ \mu C & \lambda A + (\lambda + 2\mu)D & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(A + D) \end{pmatrix} \quad (24) \end{aligned}$$

- Le champ (24) doit vérifier les conditions aux limites en contraintes :

- Sur la face supérieure: $T_1 = -p$, $T_2 = T_3 = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{T} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)A + \lambda D \\ \mu C \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

A partir de (25), on obtient:

$$C = 0, \quad (\lambda + 2\mu)A + \lambda D = -p \quad (26)$$

- Sur les faces perpendiculaires à x_2 : $T_1 = T_2 = T_3 = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{T} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda A + (\lambda + 2\mu)D \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

A partir de (27), on obtient:

$$\lambda A + (\lambda + 2\mu)D = 0 \quad (28)$$

A partir des équations (27) et (28), on obtient:

$$D = \frac{\lambda p}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad A = -\frac{(\lambda + 2\mu)p}{4\mu(\lambda + \mu)}$$

On peut montrer que les autres conditions aux limites en contrainte sont vérifiées. Finalement, la solution du problème est donnée par:

$$[\vec{u}] = \begin{pmatrix} -\frac{(\lambda+2\mu)p}{4\mu(\lambda+\mu)}x_1 = \frac{(\nu-1)(1+\nu)}{E}px_1 \\ \frac{\lambda p}{4\mu(\lambda+\mu)}x_2 + F = \frac{\nu(1+\nu)}{E}px_2 + F \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\underline{\sigma}] = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda p}{2(\lambda+\mu)} = -\nu p \end{pmatrix}$$

Massif de sol pesant uniformément chargé

Un massif de sol homogène et pesant, de masse volumique ρ , occupe le demi-espace $x_2 \leq 0$. Il est soumis à l'action des forces de pesanteur ainsi qu'à une densité de forces $-q\vec{e}_2$ uniformément répartie à sa surface $x_2 = 0$, où \vec{e}_2 désigne le vecteur unitaire de l'axe vertical ascendant Ox_2 (Figure 8). Le comportement du sol est par ailleurs supposé élastique linéaire isotrope. Enfin l'on admettra, compte tenu des symétries du problème et de la nature du chargement, que le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ a pour seule composante non nulle ε_{22} et que cette dernière ainsi que celles du tenseur de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ ne dépendent que de la variable x_2 .

- 1 Des équations de l'équilibre, déduire les expressions de σ_{12} , σ_{22} , et σ_{23} .
- 2 Achever la détermination de $\underline{\underline{\sigma}}$ en utilisant la loi de comportement et les conditions aux limites à la surface $x_2 = 0$.

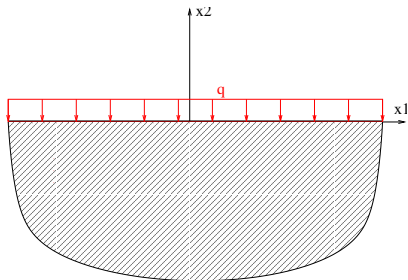


Figure 8:

Solution

- ① Sachant que les contraintes ne dépendent que de x_2 et que les forces volumiques sont égales à $-\rho g \vec{e}_2$, les équations de l'équilibre donnent:

$$\begin{cases} \sigma_{12,2} = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = A \\ \sigma_{22,2} - \rho g = 0 \Rightarrow \sigma_{22} = \rho g x_2 + B \\ \sigma_{32,2} = 0 \Rightarrow \sigma_{32} = C \end{cases} \quad (29)$$

- 2 Les composantes du tenseur de déformation dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont données par:

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La loi de comportement donne:

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \lambda\varepsilon_{22} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\varepsilon_{22} \end{pmatrix} \quad (30)$$

En identifiant (29) avec (30), on aboutit à:

$$A = C = 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\rho g x_2 + B}{\lambda + 2\mu}$$

Sur la surface $x_2 = 0$, la normale extérieure unitaire ainsi que le vecteur contrainte sont donnés par:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix}$$

La relation $\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}$ donne:

$$(\lambda + 2\mu) \varepsilon_{22}|_{x_2=0} = B = -q$$

Finalement, on obtient:

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\rho g x_2 - q) & 0 & 0 \\ 0 & \rho g x_2 - q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\rho g x_2 - q) \end{pmatrix}$$

En élasticité plane, il y a deux cas:

- Déformation plane.
- Contrainte plane.

Déformation plane (DP)

Un champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(x, y)$ est plan perpendiculairement à Oxy s'il dérive d'un champ $\vec{u}(x, y)$ tel que:

$$u_z = 0; \quad u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y)$$

On a donc:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La sous-matrice : $[\tilde{\epsilon}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}$ est celle d'un tenseur symétrique sur \mathbb{R}^2 qui dérive d'un champ bidimensionnel $[\tilde{u}] = \begin{pmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{pmatrix}$

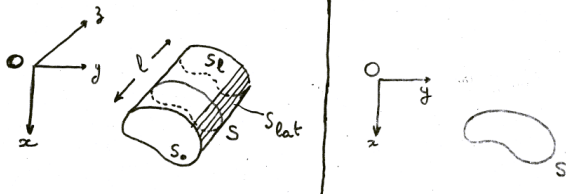
Lorsque la forme du solide étudié, les conditions aux limites ainsi que les forces de volume s'y prêtent, on recherche la solution en déplacement sous la forme d'un champ de déplacement \tilde{u} , duquel dérive un champ de déformation $\tilde{\epsilon}$, en **traitant un problème plan**.

Problème susceptible d'une solution en déformation plane

- solide constitué d'un matériau homogène, isotrope de forme cylindrique parallèle à Oz.
- forces de volume $F_z = 0$, $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$

conditions aux limites:

réduction à un pb plan



- Sur S_0 et S_l :
 $u_z = 0, \quad T_x = T_y = 0$ surface fixée sans frottements
- Sur S_{lat} :
(u_x où T_x) et (u_y où T_y) sont fixées à des valeurs ne dépendant pas de z
(u_z où T_z) sont fixées à 0

Remarque

Un problème qui ne vérifie pas les conditions sur S_0 et S_l peut être considéré en DP à condition que $l \gg \dim$ de S . La solution obtenue peut être corrigée à l'aide de la RDM.

Résolution par la méthode des déplacements

On cherche $[\tilde{u}] = \begin{pmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{pmatrix}$ satisfaisant aux C.L. sur le contour de S. En complétant ce champ par $u_z = 0$ le champ \vec{u} obtenu satisfait bien les C.L. en déplacement sur le contour du solide 3D. Le champ \tilde{u} doit satisfaire l'équation de Navier qui se réduit à deux équations :

$$(\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu\Delta_2 u_i + F_i = 0 \quad i, j = 1, 2 \text{ où } \Delta_2 u_j = u_{j,11} + u_{j,22}$$

Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$ est, compte tenu de la forme de $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ n'est fonction que de (x, y) .

La sous-matrice $[\tilde{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$ est telle que :

$$\tilde{\sigma} = \lambda \text{tr} \tilde{\varepsilon} \cdot \tilde{1} + 2\mu \tilde{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \lambda \text{tr} \tilde{\varepsilon} = \nu \text{tr} \tilde{\sigma}$$

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfait les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_x = T_y = 0 & \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell \\ T_z = 0 & \text{sur } S_{lat} \end{cases}$$

Conclusion

La résolution du problème 3D initial est ramené à la résolution d'un problème bidimensionnel :

- rechercher \tilde{u} satisfaisant les CL en déplacement au contour de S et l'équation de Navier bidimensionnelle.
- calculer $\tilde{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{\mathbf{i}} + 2\mu \tilde{\epsilon}$ et vérification des CL en contrainte au contour de S.
- La solution bidimensionnelle obtenue permet ensuite de conclure :

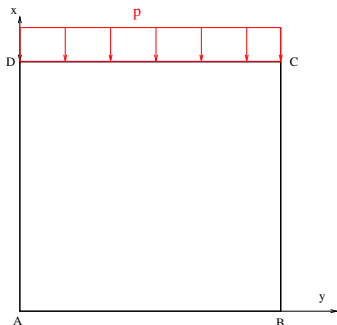
$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + 0 \vec{k}$$
$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \nu \operatorname{tr} \tilde{\sigma}$$

Exemple

Reprendre l'exemple du massif en compression en le traitant comme un problème plan.

Solution

C'est un problème en DP. Il peut être réduit à un problème plan.
On considère une section quelconque :



Les C.L :

- sur AB : $u_x = T_y = 0$
- sur BC : $T_x = T_y = 0$
- sur CD : $T_y = 0, \quad T_x = -p$
- sur DA : $T_y = T_x = 0$

Résolution par la méthode des déplacements

- On choisit $[\tilde{u}] = \begin{pmatrix} E_x \\ F_y + G \end{pmatrix}$.

Vérification des CL en déplacement:

$$\text{sur AB, } x=0 \quad u_x = 0 \Rightarrow \tilde{u} \text{ est C.A.}$$

- Équation de Navier bidimensionnelle :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)(u_{x,xx} + u_{y,xy}) + \mu(u_{x,xx} + u_{x,yy}) + F_x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ (\lambda + \mu)(u_{y,xy} + u_{y,yy}) + \mu(u_{y,xx} + u_{y,yy}) + F_y = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

- Calcul de $\tilde{\sigma} = \lambda \text{tr} \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{I} + 2\mu \tilde{\epsilon}$.

$$[\tilde{\epsilon}] = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \Rightarrow [\tilde{\sigma}] = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)E + \lambda F & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu)F + \lambda E \end{pmatrix}$$

- Vérification des CL en contraintes sur le contour.
sur AB :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)E + \lambda F & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu)F + \lambda E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} -(\lambda + 2\mu)E - \lambda F \\ 0 \end{pmatrix} \implies T_y = 0$$

sur BC :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)E + \lambda F & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu)F + \lambda E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda + 2\mu)F + \lambda E \end{pmatrix}$$

$$T_y = 0 \implies \boxed{(\lambda + 2\mu)F + \lambda E = 0} \quad \text{eq. 1,} \quad T_x = 0$$

sur CD :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)E + \lambda F & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu)F + \lambda E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)E + \lambda F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_y = 0, \quad T_x = -p \Rightarrow \boxed{(\lambda + 2\mu)E + \lambda F = -p} \quad \text{eq. 2}$$

sur DA :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)E + \lambda F & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu)F + \lambda E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\lambda + 2\mu)F - \lambda E \end{pmatrix}$$

$$T_y = 0 \Rightarrow \boxed{(\lambda + 2\mu)F + \lambda E = 0} \quad \text{eq. 1}, \quad T_x = 0$$

La résolution des équations 1 et 2 donne :

$$\begin{cases} E = -\frac{(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)}p \\ F = \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}p \end{cases}$$

Sachant que $\sigma_z = \lambda \operatorname{tr} \tilde{\varepsilon} = \lambda(E + F)$, la solution tridimensionnelle est donnée par :

$$[\underline{u}] = \begin{pmatrix} -\frac{(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)}px \\ \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}py + G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\underline{\sigma}] = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda p}{2(\lambda+\mu)} = -\nu p \end{pmatrix}$$

Résolution par la méthode des forces

On cherche un champ de contrainte de la forme

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \nu \operatorname{tr} \tilde{\tilde{\sigma}},$$

ce qui revient à déterminer un champ bidimensionnel $\tilde{\tilde{\sigma}}$.

- Ce champ $\tilde{\tilde{\sigma}}$ satisfait aux conditions : $T_x = T_y = 0$ sur S_0 et S_ℓ , $T_z = 0$ sur S_{lat} .
- les équations de l'équilibre qui se réduisent à deux équations bidimensionnelles :

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} + F_x = 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y} + F_y = 0 \end{cases} \quad (31)$$

- l'équation de Beltrami bidimensionnelle :

Les équations de compatibilité en déformations planes se réduisent à une seule équation:

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy} \quad (32)$$

Comme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{1}}$$

avec :

$$\text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x + \sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \nu) \text{tr} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$$

La loi de comportement bidimensionnelle peut s'écrire :

$$\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1 + \nu}{E} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \text{tr} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{1}}} \quad (33)$$

En introduisant la loi de comportement (33) et les équations d'équilibre bidimensionnelles (31) dans l'équation de compatibilité (32), on obtient l'équation de Beltrami bidimensionnelle:

$$\Delta_2 \text{tr} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{1}{1 - \nu} \text{div}_2 \tilde{\underline{\underline{F}}} = 0 \quad \text{avec} \quad \text{div}_2 \tilde{\underline{\underline{F}}} = F_{x,x} + F_{y,y}$$

dans le cas où les forces de volumes sont constants (gravité, milieu homogène), elle devient:

$$\Delta_2 \text{tr} \tilde{\sigma} = 0 \quad (34)$$

- Le champ de déformation $\tilde{\epsilon}$ peut être intégré et conduit au champ \tilde{u} qui doit satisfaire aux CL au bord de S.
- On obtient finalement la solution 3D (\vec{u} , $\underline{\sigma}$).

Exercice

Résoudre le problème précédent par la méthode des forces, en

prenant $[\tilde{\sigma}] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\sigma_z = \nu(A + B)$

- Vérification des CL en contrainte :

- sur AB :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} -A \\ 0 \end{pmatrix} \implies T_y = 0$$

- sur BC :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- sur CD :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Les équations de l'équilibre sont automatiquement vérifiées (champ de contrainte homogène).
- Équation de Beltrami bidimensionnelle :

$$\Delta_2 \operatorname{tr} \tilde{\sigma} = \Delta_2(-p) = 0$$

- Calcul de $\tilde{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \operatorname{tr} \tilde{\sigma} \cdot \tilde{l}$.

$$[\tilde{\varepsilon}] = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} (-1+\nu)p & 0 \\ 0 & \nu p \end{pmatrix}$$

- Calcul des déplacements :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Rightarrow u_x = \int \varepsilon_x dx = \frac{(\nu-1)(1+\nu)}{E} px + g(y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \Rightarrow u_y = \int \varepsilon_y dy = \frac{\nu(1+\nu)}{E} py + f(x)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) = 0 \Rightarrow f'(x) + g'(y) = 0 \Rightarrow f'(x) = -g'(y) = C$$

$$f(x) = Cx + D, \quad g(y) = -Cy + E$$

$$u_x = \frac{(\nu-1)(1+\nu)}{E} px - Cy + E, \quad u_y = \frac{\nu(1+\nu)}{E} py + Cx + D$$

- CL en déplacement :

$$x = 0, u_x = 0, -Cy + E = 0, \forall y \Rightarrow C = E = 0$$

- Le champ solution tridimensionnel est donc :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{(\nu-1)(1+\nu)}{E} px \\ \frac{\nu(1+\nu)}{E} py + D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu p \end{pmatrix}$$

Fonction d'Airy

La méthode des forces, peut être simplifiée grâce à l'introduction d'une fonction $\phi(x, y)$, appelée **fonction d'Airy**. Dans le cas où les forces de volume sont négligeables, les contraintes sont données par :

$$\sigma_{xx} = \phi_{,yy} , \quad \sigma_{yy} = \phi_{,xx} , \quad \sigma_{xy} = -\phi_{,xy} . \quad (35)$$

Avec les contraintes écrites sous cette forme, les équations d'équilibre sont automatiquement vérifiées:

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} = \phi_{,yyx} - \phi_{,xyy} = 0 \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{y,y} = -\phi_{,xyx} + \phi_{,xxy} = 0 \end{cases}$$

En introduisant les équations (35) dans l'équation de Beltrami (34), elle devient:

$$\Delta\Delta\phi = \phi_{,xxxx} + 2\phi_{,xxyy} + \phi_{,yyyy} = 0$$

La fonction ϕ est dite **biharmonique**

Méthode de résolution avec la fonction d'Airy

- Choisir une fonction $\phi(x, y)$ biharmonique. Les équations d'équilibre et l'équation de Beltrami sont automatiquement vérifiées.
- Calculer les contraintes (équation (35)) et vérifier les C.L. en contrainte.
- Calculer $\tilde{\varepsilon}$ en utilisant la loi de comportement (33).
- Intégrer $\tilde{\varepsilon}$ pour obtenir \tilde{u} et vérifier les C.L. en déplacement.

Exemple

Résoudre le problème précédent en prenant $\phi(x, y) = Ay^2 + Bx^2$, et calculer p_{max} .

Solution

- Vérifier que $\phi(x, y)$ est biharmonique.
- Calculer les contraintes :

$$\sigma_x = \phi_{,yy} = 2A, \quad \sigma_y = \phi_{,xx} = 2B, \quad \sigma_{xy} = -\phi_{,xy} = 0$$

- Vérification des CL en contraintes sur le contour.
sur AB :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2B \end{pmatrix}, \quad T_y = 0 \Rightarrow B = 0$$

sur BC :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sur CD :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} 2A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}p$$

sur DA :

$$[\tilde{T}] = [\tilde{\sigma}][\tilde{n}] = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{T}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La suite (calcul du déplacement et vérification des CL en déplacements), a déjà été effectuée dans l'exercice précédent. Finalement, on trouve :

$$\underline{\vec{u}} = \begin{pmatrix} \frac{(\nu-1)(1+\nu)}{E} p x \\ \frac{\nu(1+\nu)}{E} p y + D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu p \end{pmatrix}$$

Calcul de p_{max}

$$[\underline{\underline{S}}] = \begin{pmatrix} \frac{-2+\nu}{3} p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\nu}{3} p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{3} p \end{pmatrix}, \quad tr \underline{\underline{S}}^2 = \frac{2(1+\nu^2-\nu)}{3} p^2$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} tr \underline{\underline{S}}^2} = p \sqrt{1+\nu^2-\nu} \leq \sigma_a \Rightarrow p_{max} = \frac{\sigma_a}{\sqrt{1+\nu^2-\nu}}$$

Etat de contraintes planes (CP)

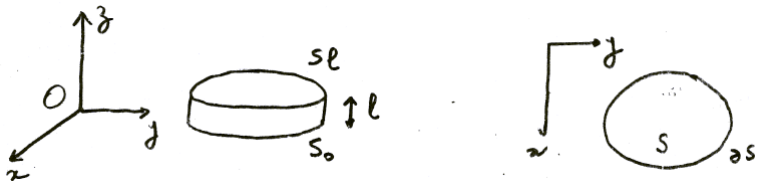
Les champs de contraintes planes dans le plan Oxy sont tels que:

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ est fonction de } (x,y) \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

On recherche des solutions en contraintes planes dans les cas où la géométrie et les conditions aux limites du solide considéré ont les caractéristiques suivantes:

- solide cylindrique parallèle à Oz de section droite S et de hauteur l (en général $l \ll \text{dim de } S$)
- forces de volume \vec{F} fonction de (x,y) avec $F_z = 0$

Conditions aux limites



- sur S_0 et S_l : $\vec{T} = 0$ (surfaces libres de contraintes)
- sur la surface latérale : $T_z = 0$ et T_x (ou u_x) et T_y (ou u_y) sont indépendants de z .

Résolution par la méthode des forces

On cherche un champ de contrainte de la forme

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui revient à déterminer un champ bidimensionnel $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$.

- Ce champ $\tilde{\sigma}$ satisfait aux conditions en contrainte sur ∂S .
- Et les équations de l'équilibre qui se réduisent à deux équations bidimensionnelles :

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} + F_x = 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y} + F_y = 0 \end{cases}$$

Remarque

Les équations d'équilibre bidimensionnelles sont les mêmes en CP et en DP.

- Le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ s'obtient à partir de $\underline{\underline{\sigma}}$ par:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{I}}$$

soit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) & \varepsilon_{xz} = 0 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} & \varepsilon_{yz} = 0 \\ \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) & \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

Puisque $l \ll \dim$ de S , l'influence de ε_z est négligeable et u_z est négligeable devant u_x et u_y . La loi de comportement bidimensionnelle peut s'écrire:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{l}} \quad (36)$$

- Compte tenu de la forme du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ les 6 équations de compatibilité se réduisent à l'équation suivante :

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy} \quad (37)$$

et aux trois autres suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz,xx} = 0 \\ \varepsilon_{zz,yy} = 0 \\ \varepsilon_{zz,xy} = 0 \end{cases}$$

Ces trois dernières équations sont négligées.

- En introduisant la loi de comportement bidimensionnelle (36) dans l'équation (37), et en utilisant les équations d'équilibre bidimensionnelles, on obtient l'équation de Beltrami bidimensionnelle:

$$\Delta_2 tr \tilde{\sigma} + (1 + \nu) div_2 \tilde{F} = 0 \quad (38)$$

- Le champ de déformation $\tilde{\epsilon}$ peut être intégré et conduit au champ \tilde{u} qui doit satisfaire aux CL au bord de S.
- On obtient finalement la solution du problème $(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$

Remarques

- La résolution par *la méthode des forces* en CP et en DP est formellement la même sauf la loi de comportement bidimensionnelle. En effet, on a :

$$\begin{cases} \tilde{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\sigma} \cdot \tilde{I} & \text{contrainte plane} \\ \tilde{\sigma} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\epsilon} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \text{tr} \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{I} & \text{déformation plane} \end{cases}$$

Exemple

Refaire l'exemple précédent en CP avec la méthode des forces.

Solution

Les CL aux limites ne changent pas. On postule un champ de contrainte de la forme : $[\tilde{\sigma}] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

- Vérification des CL en contrainte $\implies A = -p, B = 0$
- Vérification des équations de l'équilibre.
- Vérification de l'équation de Beltrami.
- Calcul des déformations en utilisant **la loi de comportement bidimensionnelle en CP** (Différente de DP) :

$$[\tilde{\epsilon}] = \frac{1+\nu}{E}[\tilde{\sigma}] - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\sigma} \cdot [\tilde{I}] = \frac{p}{E} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

Remarque

On est dans le cas d'un chargement uniaxial, la déformation aurait pu être calculée en utilisant la loi de Hooke :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{p}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = \frac{\nu p}{E}$$

- Calcul des déplacements :

$$u_x = \int \varepsilon_x dx = \int -\frac{p}{E} dx = -\frac{p}{E}x + C(y)$$

$$u_y = \int \varepsilon_y dy = \int \frac{\nu p}{E} dy = \frac{\nu p}{E}y + D(x)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) = \frac{1}{2}(C'(y) + D'(x)) = 0 \Rightarrow C'(y) = -D'(x) = F$$

$$C(y) = Fy + G, \quad D(x) = -Fx + H$$

$$\begin{cases} u_x = -\frac{p}{E}x + Fy + G \\ u_y = \frac{\nu p}{E}y - Fx + H \end{cases}$$

- Vérification des CL en déplacement.

$$x = 0, u_x = Fy + G = 0, \forall y \implies F = G = 0$$

- Solution finale :

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{E}x \\ -\frac{\nu p}{E}y + H \end{pmatrix} \quad [\tilde{\sigma}] = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcul de p_{max} :

$$[\underline{s}] = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{-p}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{3} \end{pmatrix}, \quad tr \underline{s}^2 = \frac{2p^2}{3}$$

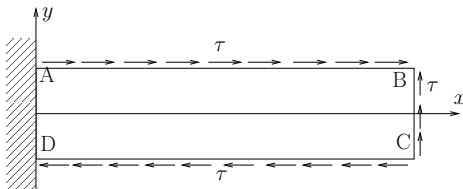
$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} tr \underline{s}^2} = p \leq \sigma_a \implies p_{max} = \sigma_a$$

Remarque

On est dans le cas d'un chargement uniaxial. On aurait pu utiliser directement la condition de résistance :

$$\rho \leq \sigma_a$$

Exemple : Cisaillement simple



On néglige le poids. Résoudre le problème élastique avec la méthode des forces en CP et trouver τ_{max} .

Solution

On postule :

$$[\tilde{\sigma}] = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

- 1 Les conditions aux limites s'écrivent :
 - Sur AB : $T_1 = \tau$, $T_2 = 0$
 - Sur BC : $T_1 = 0$, $T_2 = \tau$
 - Sur CD : $T_1 = -\tau$, $T_2 = 0$
 - Sur DA : $u_1 = u_2 = 0$
- 2 Vérification des conditions aux limites en contrainte :
 - Sur AB on a :

$$\tilde{T} = \tilde{\sigma} \tilde{n} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Sur BC on a :

$$\tilde{T} = \tilde{\sigma} \tilde{n} = \begin{pmatrix} A & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix}$$

- Sur CD même résultat que AB.

- 3 Équations de l'équilibre vérifiées.

- 4 L'équation de Beltrami $\Delta_2 tr \tilde{\sigma} = 0$, vérifiée.
- 5 Le tenseur de déformation est donné par ($tr \tilde{\sigma} = 0$):

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \tilde{\sigma} = \frac{1 + \nu}{E} \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix}$$

- 6 On intègre d'abord les déformations :

$$u_{x,x} = \varepsilon_{xx} = 0 \Rightarrow u_x = f(y)$$

$$u_{y,y} = \varepsilon_{yy} = 0 \Rightarrow u_y = g(x)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \tau = \frac{1}{2}(f'(y) + g'(x)) \quad (39)$$

La seule possibilité pour que (39) soit vérifiée est que $f'(y) = C$ et $g'(x) = D$. On a donc :

$$C + D = 2 \frac{1 + \nu}{E} \tau, \quad u_x = Cy + F, \quad u_y = (2 \frac{1 + \nu}{E} \tau - C)x + G$$

7 Vérification des CL en déplacement :

Sur DA ($x = 0$), les conditions aux limites en déplacements donnent:

$$\begin{cases} u_x = 0 \Rightarrow C = F = 0 \\ u_y = 0 \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Finalement, la solution est donnée par :

$$\begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 2 \frac{1+\nu}{E} x \end{cases}, \quad [\tilde{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix}$$

8 Calcul de τ_{max} :

$$[\underline{s}] = [\underline{\sigma}] = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\underline{s}^2] = \begin{pmatrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} \underline{s}^2} = \sqrt{3} \tau \leq \sigma_a \implies \tau_{max} = \frac{\sigma_a}{\sqrt{3}}$$

Fonction d'Airy

De même qu'en DP, la méthode des forces, peut être simplifiée grâce à l'utilisation de la fonction d'Airy. Dans le cas où les forces de volume sont négligeables, les contraintes se calculent avec (35), et la fonction doit être biharmonique pour vérifier l'équation de Beltrami.

Exemple

Reprendre l'exemple précédent en prenant :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}Ay^2 + \frac{1}{2}Cx^2 - Bxy$$

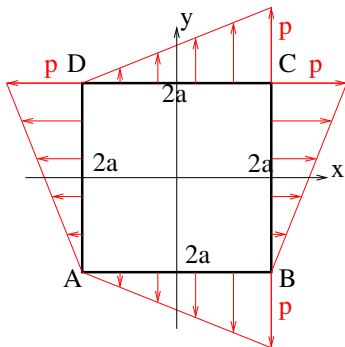
Solution

On calcule les contraintes :

$$\sigma_x = A, \quad \sigma_y = C, \quad \sigma_{xy} = B$$

La suite est la même que l'exercice précédent sauf qu'on n'a pas besoin de vérifier les équations d'équilibre et Beltrami.

Exemple



On est en CP. On demande de calculer les contraintes et les déplacements en prenant:

$$\phi(x, y) = A(x^3 + 3ax^2) + B(y^3 + 3ay^2) + Cxy$$

Les forces de volumes sont négligées.

Solution

- Ecrire les CL:

$$\text{Sur AB : } T_x = 0, \quad T_y = -\frac{p}{2a}(x + a)$$

$$\text{Sur BC : } T_x = \frac{p}{2a}(y + a), \quad T_y = 0$$

$$\text{Sur CD : } T_x = 0, \quad T_y = \frac{p}{2a}(x + a)$$

$$\text{Sur DA : } T_x = -\frac{p}{2a}(y + a), \quad T_y = 0$$

- Vérifier que $\phi(x, y)$ est biharmonique.

$$\Delta\phi = 6A(x + a) + 6B(y + a) \Rightarrow \Delta\Delta\phi = 0$$

- Calculer les contraintes:

$$\begin{cases} \sigma_x = \phi_{,yy} = 6B(y + a) \\ \sigma_y = \phi_{,xx} = 6A(x + a) \\ \sigma_{xy} = -\phi_{,xy} = -C \end{cases}$$

- Vérifier les CL en contraintes :

$$\text{Sur AB, } y=-a : \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -C \\ -C & 6A(x + a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C \\ -6A(x + a) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{p}{12a} \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sur BC, } x=a: \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6B(y+a) & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6B(y+a) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{2a}(y+a) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \frac{p}{12a}$$

$$\text{Sur CD, } y=a: \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{p}{2a}(x+a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p}{2}(\frac{x}{a} + 1) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sur DA, } x=-a: \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{2a}(y+a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{2}(\frac{y}{a} + 1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer le champ $\tilde{\epsilon}$:

$$[\tilde{\epsilon}] = \frac{1+\nu}{E} [\tilde{\sigma}] - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\sigma} \cdot [\tilde{I}] = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \sigma_x - \nu\sigma_y & (1+\nu)\sigma_{xy} \\ (1+\nu)\sigma_{xy} & \sigma_y - \nu\sigma_x \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{\epsilon}] = \frac{p}{2Ea} \begin{pmatrix} y+a - \nu(x+a) & 0 \\ 0 & x+a - \nu(y+a) \end{pmatrix}$$

- Intégrer le champ \tilde{u} :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{p}{2Ea} (y + a - \nu(x + a))$$

$$u_x(x, y) = \int \varepsilon_x dx = \frac{p}{2Ea} \left((y + a)x - \nu \left(\frac{x^2}{2} + ax \right) + f(y) \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{p}{2Ea} (x + a - \nu(y + a))$$

$$u_y(x, y) = \int \varepsilon_y dy = \frac{p}{2Ea} \left((x + a)y - \nu \left(\frac{y^2}{2} + ay \right) + g(x) \right)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (x + f'(y) + y + g'(x)) = 0$$

$$f'(y) + y = -(g'(x) + x) = D \Rightarrow \begin{cases} f(y) = -\frac{y^2}{2} + Dy + F \\ g(x) = -\frac{x^2}{2} - Dx + F \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \frac{p}{2Ea} \left((y + a)x - \nu \left(\frac{x^2}{2} + ax \right) - \frac{y^2}{2} + Dy + E \right) \\ u_y(x, y) = \frac{p}{2Ea} \left((x + a)y - \nu \left(\frac{y^2}{2} + ay \right) - \frac{x^2}{2} - Dx + F \right) \end{cases}$$

Remarque

Les parties indéterminées, $Dy + E$ de u_x et $-Dx + F$ de u_y , représentent des déplacements de corps rigide.

Exercice Refaire l'exercice précédent en DP.

Pour certaines géométries, il est plus commode d'utiliser les coordonnées polaires (Figure 10).

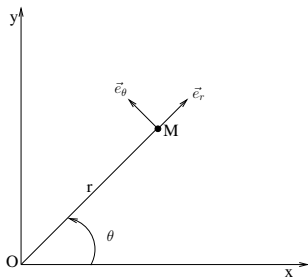


Figure 9: Coordonnées polaires

Le point M est repéré par sa distance r par rapport à l'origine, et par l'angle θ entre \vec{OM} et l'axe x .

Composantes des contraintes

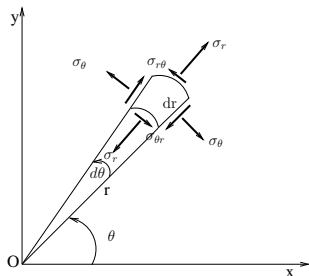


Figure 10: Contraintes en coordonnées polaires

σ_r : contrainte radiale.

σ_θ : contrainte circonférentielle.

$$dS = r dr d\theta$$

Relations contraintes - fonction d'Airy

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} + \frac{1}{r} \phi_{,r} \\ \sigma_\theta = \phi_{,rr} \\ \sigma_{r\theta} = -\left(\frac{1}{r} \phi_{,\theta}\right)_{,r} \end{cases} \quad (40)$$

Relation déformation-déplacement

$$\begin{cases} \varepsilon_r = u_{r,r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}(u_r + u_{\theta,\theta}) \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{cases} \quad (41)$$

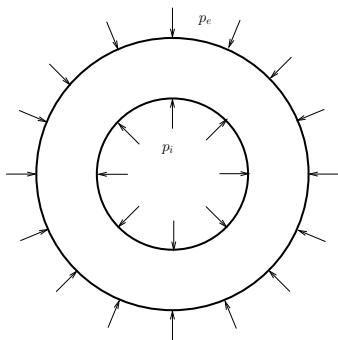
Équations de l'équilibre

$$\begin{cases} \sigma_{r,r} + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta,\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r = 0 \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0 \end{cases} \quad (42)$$

Laplacien

$$\Delta \phi = \phi_{,rr} + \frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} \quad (43)$$

Cylindre creux à paroi épaisse sous pression uniforme



Soit un long cylindre creux à paroi épaisse, de rayon extérieur R_e , et de rayon intérieur R_i . Il est soumis à une pression uniforme interne p_i et externe p_e . Le poids est négligé. Calculer les contraintes et les déplacements.

Solution

On est en DP. Le problème est **axisymétrique** (géométrie et chargement indépendants de θ). On va le résoudre avec la méthode des forces en prenant :

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B, \quad \sigma_{r\theta} = 0$$

- Conditions aux limites :
 - En $r = R_i$, $T_r = p_i$, $T_\theta = 0$.
 - En $r = R_e$, $T_r = -p_e$, $T_\theta = 0$.
- Vérification des CL en contrainte:
 - En $r = R_i$:

$$\begin{pmatrix} \frac{A}{R_i^2} + B & 0 \\ 0 & -\frac{A}{R_i^2} + B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{A}{R_i^2} - B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

- En $r = R_e$:

$$\begin{pmatrix} \frac{A}{R_e^2} + B & 0 \\ 0 & -\frac{A}{R_e^2} + B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{R_e^2} + B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_e \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La résolution du système donne :

$$\begin{cases} -\frac{A}{R_i^2} - B = p_i \\ \frac{A}{R_e^2} + B = -p_e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{(p_e - p_i) R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ B = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{cases}$$

- Vérification des équations d'équilibre (42):

$$\begin{cases} -\frac{2A}{r^3} + \frac{2A}{r^3} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Vérification de Beltrami :

$$tr \tilde{\sigma} = 2B \implies \Delta_2 tr \tilde{\sigma} = 0$$

- Calcul des déformations :

$$\begin{aligned}
 [\tilde{\varepsilon}] &= \frac{1+\nu}{E} \left([\tilde{\sigma}] - \nu \text{tr} \tilde{\sigma} [\tilde{I}] \right) \\
 &= \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \frac{A}{r^2} + B(1-2\nu) & 0 \\ 0 & -\frac{A}{r^2} + B(1-2\nu) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- on intègre en recherchant un champ de déplacement ne dépendant que de r .

$$u_r = \int \varepsilon_r dr = \frac{1+\nu}{E} \left(-\frac{A}{r} + B(1-2\nu)r + C \right)$$

$$u_\theta = \int (r\varepsilon_\theta - u_r) d\theta = \frac{1+\nu}{E} (-C\theta + D) \Rightarrow C = 0$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{1+\nu}{2E} \left(-\frac{D}{r} \right) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$u_r = \frac{1+\nu}{E} \left(-\frac{A}{r} + B(1-2\nu)r \right), \quad u_\theta = 0$$

On est en élasticité anti-plane, lorsque :

$$u_1 = u_2 = 0, u_3 = u_3(x_1, x_2)$$

Les déformations deviennent :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_{12} = 0, \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}u_{3,1}, \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}u_{3,2}$$

Les contraintes deviennent :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{12} = 0, \sigma_{13} = \mu u_{3,1}, \sigma_{23} = \mu u_{3,2}$$

En négligeant les forces de volumes, les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\mu u_{3,11} + \mu u_{3,22} = 0 \Leftrightarrow \Delta u_3 = 0, u_3(x_1, x_2) \text{ harmonique}$$

Fonction holomorphe (analytique) d'une fonction de la variable complexe

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe telle que :

$$f(z) = g(x, y) + ih(x, y), \quad z = x + iy$$

Relations de Cauchy-Riemann :

$$g_{,1} = h_{,2}, \quad g_{,2} = -h_{,1}$$

$g(x, y)$ et $h(x, y)$ sont harmoniques :

$$\Delta g = \Delta h = 0$$

On peut écrire :

$$\mu u_3 = \operatorname{Re}(f(z)) \quad (44)$$

On a alors :

$$\sigma_{31} = g_{,1}, \quad \sigma_{32} = g_{,2} = -h_{,1}$$

On en déduit :

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x_1} = g_{,1} + ih_{,1} = \sigma_{31} - i\sigma_{32} \quad (45)$$

Méthode de résolution en élasticité anti-plane

- On choisit une fonction holomorphe $f(z)$
- On détermine u_3 à l'aide de (44). L'équation de Navier est automatiquement vérifiée car u_3 est harmonique.
- On vérifie les CL en déplacement.
- On calcule les contraintes à l'aide de (45).
- On vérifie les CL en contrainte.

Exercice 1 [Étude d'un champ de déplacement]

Soit un corps repéré dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Pour un point M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) , le vecteur déplacement est :

$$\vec{u}(M) = 2ax_1x_2\vec{e}_1 + (7ax_1^2 - 3ax_2^2)\vec{e}_2, \quad a \text{ infiniment petit}$$

- 1 Écrire les équations d'équilibre. Quelle est la valeur du coefficient de Poisson qui permet de les satisfaire en l'absence de force de volume ?
- 2 Avec les conditions précédentes, déterminer le tenseur des contraintes dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
- 3 Quelle est la valeur limite de la constante a si on ne veut pas que la contrainte équivalente de Von Mises dépasse la valeur de 24 daNmm^{-2} au point $(\sqrt{15}, 6, 3)$. On prendra $E = 210 \text{ GPa}$.

Exercice 2

On considère un domaine (D) en équilibre statique, tel qu'en tout point M de ce domaine, l'état de contrainte soit de la forme suivante :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \quad \text{avec} \quad \sigma = \sigma(x_1, x_2, x_3)$$

- 1 Calculer les composantes des forces volumiques. A quelles conditions cette force peut-elle être celle du champ de pesanteur? En déduire la fonction $\sigma(x_1, x_2, x_3)$.
- 2 Le domaine (D) est un tronc de cône de demi-angle au sommet β , d'axe vertical, placé dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_1$. On exerce une pression p_0 sur la grande base (S_1) du tronc de cône (Figure 11). En déduire la fonction $\sigma(x_1, x_2, x_3)$ et les conditions aux limites (chargement) sur la petite base (S_2) et la surface latérale (S_3).

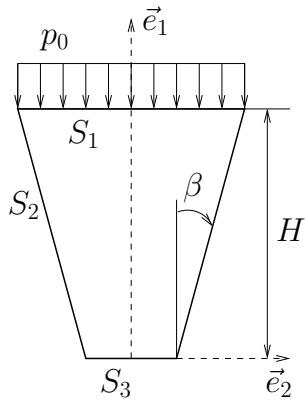


Figure 11:

Exercice 3[barrage poids]

Soit un barrage poids schématisé sur la figure 12. Ce barrage de masse volumique ρ_b et de section triangulaire OAB repose simplement sur le sol par son côté AB et retient une hauteur H d'eau sur son côté OA. Ce problème est assimilable à un problème de déformations planes. On se propose de le résoudre en prenant une fonction d'Airy de la forme suivante :

$$\phi(x, y) = Ax^3 + By^3 + Cx^2y + Dxy^2$$

- 1 Calculer les contraintes à partir de la fonction d'Airy.
- 2 En utilisant les conditions aux limites sur OA et OB, déterminer la répartition des contraintes en fonction de ρ_b et ρ_e (masse volumique de l'eau) et α .
- 3 En déduire les efforts surfaciques du sol sur le barrage. Quelle condition doit-on imposer pour qu'il n'y ait pas de soulèvement du barrage.

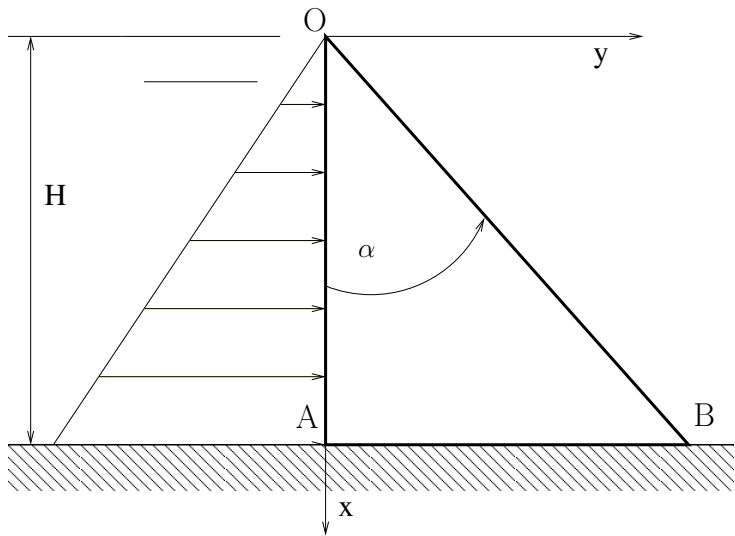


Figure 12:

Exercice 4

Soit le problème plan d'un solide, de masse volumique ρ et de hauteur h , soumis à son propre poids (Figure 13). Les côtés BC, CD et DA sont libres. Le côté AB porte une charge surfacique inconnue. On sait que la seule contrainte non nulle dans le plan (x,y) est σ_1 et qu'elle ne dépend que de x . On traite le problème en déformation plane.

- Quelle condition doit satisfaire $\sigma_1(x)$ pour vérifier les CL.
- Achever la détermination de $\sigma_1(x)$ à l'aide des équations d'équilibre.
- Calculer la charge surfacique appliquée sur AB.
- Donner h_{max} en fonction de σ_a

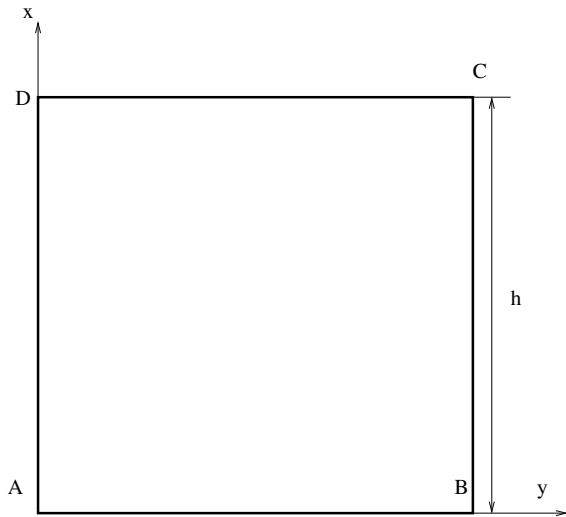


Figure 13:

Exercice 5

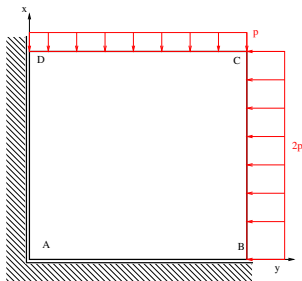
Refaire l'exercice 4 en CP.

Exercice 6

Soit la section rectangulaire d'un solide en contrainte plane sollicitée selon la Figure 14. Les côtés AB et DA reposent sans frottement sur un appui indéformable. On se propose de résoudre le problème élastique en prenant :

$$\phi(x, y) = Ax^2 + By^2.$$

Calculer p_{max} en fonction de σ_a .



Exercice 7

Refaire l'exercice 6 en DP.

Exercice 8

Un cylindre rigide de rayon extérieur $R_i + \delta$ est introduit forcé dans un cylindre creux à paroi épaisse de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e . La paroi extérieure du cylindre creux est libre. Le contact entre les deux cylindres est sans frottement. On se propose de déterminer les contraintes et les déplacements dans le cylindre creux, en déformation plane, à l'aide de la méthode des forces. On prend :

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B, \quad \sigma_{r\theta} = 0$$

Calculer la pression s'exerçant sur la paroi intérieure et δ_{max} .